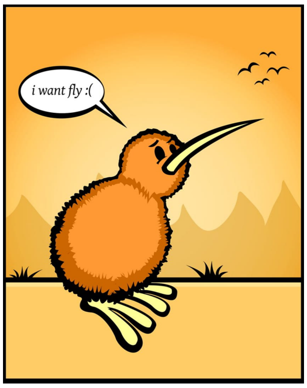
Indications :
vacances de printemps



DM9

Partie A : Etude d'endomorphismes de polynômes

1. Ne pas oublier de montrer que Ψ_a est à valeurs dans $\mathbb{R}_n[X]$.
2. (a) Calcul en distinguant $k = 0$ des autres cas.
   (b) Utiliser l'image d'une base.
   (c) La calcul se fait en distinguant le cas $k = 0$ mais il peut être réintégré dans la conclusion.
3. (a) Calcul.
   (b) Calculer $\Phi_a(\Psi_a(P))(x)$ (attention à la position des parenthèses) en distinguant le cas $x = a$.
   (c) Remarquer que $\Phi_a \circ \Psi_a = Id_{\mathbb{R}_n[X]}$ et utiliser 2.b.

Partie B : Etude d'une fonction définie par une intégrale

1. (a) h est une primitive.
   (b) Utiliser le théorème des bornes atteintes.
   (c) Utiliser le théorème d'encadrement et un argument de continuité (au bon endroit).
   (d) Raisonner de même sur $[x, 0]$.
2. Il n'y a pas de problème sur $\mathbb{R}^*$ et les questions précédentes donnent la continuité en 0.
3. (a) Faire un changement de variable.
   (b) Utiliser la positivité de l'intégrale en traitant les cas $x \geq 0$ et $x < 0$.
4. (a) Utiliser la définition de la limite et un découpage d'intégrale. On peut s'inspirer le la preuve du théorème de Césaro.
   (b) Appliquer la question précédente à $f - l$.
   (c) Poser $g : x \mapsto f(-x)$ et appliquer la question précédente à g.

Partie C :

1. Utiliser la partie B et remarquer que : $\frac{h(x)^2}{x^3} = x.\frac{h(x)^2}{x^4}$.
2. Faire une intégration par parties en dérivant h^2 et en primitivant $x \mapsto \frac{1}{x^4}$.
3. Faire un passage à la limite : $\alpha \to 0$. Pour justifier les limites, écrire les intégrales en utilisant des primitives et utiliser un argument de continuité.

Problème 1

1. Stabilité par combinaisons linéaires.
2. Dériver $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_x^{x+T} f(t)\,dt$.
3. Utiliser, par exemple, $f : x \mapsto x$ pour montrer que la réciproque est fausse.
4. (a)
   (b)
   (c) Intégration par parties.
   (d) Relation de Chasles dans le cas où $0 < x < 1$.
5. (a) Utiliser F une primitive de f.
   (b)
6. (a) Calculer $U(X^k)(x)$ en utilisant la formule du binôme de Newton.
   (b) Utiliser la linéarité de U et la question précédente.
   (c) Etudier l'image de la base canonique par U_n.
7. (a) (i) Prendre $x = 1$.
   (ii) Remarquer que $U(f)' = 0$.
   (b) Appliquer 2. à $a = x - 1$ et $T = 1$.
   (c) Utiliser la question précédente.
   (d) Remarquer que $\ker(U) \neq \{0\}$.
8. Remarquer que $\mathrm{Im}\,(U) \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Problème 2

1. (a)
   (b) Commencer par chercher une famille génératrice.
   (c) Calculer $\varphi \circ \varphi(x, y, z, t)$.
   (d) Calculer $f \circ f$.
2. (a) i.
   ii. Utiliser la relation précédente.
   (b) i. Déduire de la question précédente une inégalité sur les dimensions et utiliser le théorème du rang.
   ii. Etudier $\ker g \cap \ker h$.
   iii. Montrer que : $\dim(\ker g \oplus \ker h) \geq \dim E$.
   (c) i. Montrer l'égalité des applications linéaires sur des espaces supplémentaires.
   ii. Remarquer que : $\mathrm{Im}\, q = \ker h = \ker p$.
   iii. Utiliser la formule du binôme de Newton en remarquant que : $f = 2p - q$.