

# TD informatique du chapitre 12 : Représentation des nombres entiers

## Exercice 1 : Représentation des entiers

1. (a) Ecrire une fonction `binaire` qui prend comme arguments deux entiers naturels  $n$  et  $p$  et qui renvoie une chaîne de caractères représentant l'écriture binaire de  $n$  sur  $p$  bits.  
(b) Ecrire une fonction `decimal` qui prend comme arguments une chaîne de caractères  $b$  composée de 0 et de 1 et qui renvoie l'entier naturel représenté par  $b$ .
2. Sans écrire d'addition, écrire une fonction `sommeB` qui prend comme arguments deux chaînes de caractères  $b1$  et  $b2$  de même taille composées de 0 et de 1 et qui renvoie une chaîne de caractères représentant l'écriture binaire de la somme de  $b1$  et  $b2$  sur  $\text{len}(b1)=\text{len}(b2)$  bits.
3. (a) Ecrire une fonction `ComplementADeux` qui prend comme arguments une chaîne de caractères  $b$  composée de 0 et de 1 et un entier  $p$  et qui renvoie le complément à deux de  $b$  sur  $p$  bits.  
(b) Ecrire une fonction `binaireSigne` qui prend comme arguments un entier relatif  $n$  et un entier naturel  $p$  et qui renvoie une chaîne de caractères représentant l'écriture binaire de l'entier signé  $n$  sur  $p$  bits.

## Exercice 2 : E3A - PSI - 2016

1. On donne les programmes Python P0 et P1 suivants. Que renvoient les appels P0(5), P1(5) et P0(9), P1(9)? Dire en une phrase ce que fait chacun des programmes P0 et P1?

```

1 def P0(N): #N entier naturel
2     if N==1 :
3         return False
4     if N==2:
5         return True
6     for d in range(2,N):
7         if N%d==0:
8             return False
9         return True

```

```

1 def P1(N): #N entier naturel
2     if N==1 :
3         return False
4     if N==2:
5         return True
6     for d in range(2,N):
7         if N%d==0:
8             return False
9         return True

```

2. En une phrase, dire ce que fait le programme python, P2, qui utilise le programme P1 précédent :

```

1 def P2(N): #N entier naturel
2     L=[]
3     k=0
4     n=k*k+1
5     while n<=N:
6         if P1(n):
7             L.append(n)
8             k=k+1
9             n=k*k+1
10    return L

```

Que renvoie l'appel P2(127) ?

3. Ecrire une fonction `nextPrime` en langage python qui prend en argument un entier  $N$  et qui retourne comme valeur le premier nombre premier qui est strictement supérieur à  $N$ .
4. **Nombres jumeaux**  
On appelle *couple de nombres premiers jumeaux* toute liste  $[p, q]$  telle que  $p, q$  sont des nombres premiers vérifiant  $p < q$  et  $q = p + 2$ . Par exemple,  $[3, 5]$  ou  $[11, 13]$  sont des couples de nombres premiers jumeaux alors que  $[2, 3]$  ne l'est pas.  
(a) Ecrire à l'aide de la fonction `nextPrime` précédente, une fonction python nommée `jumeau`, prenant comme argument un entier  $N$  et renvoyant le couple  $[p, q]$  de nombres premiers jumeaux tels que  $p$  strictement supérieur à  $N$  et le plus petit possible.  
Par exemple `jumeau(5)` renvoie comme valeur  $[11, 13]$ .

- (b) Ecrire avec les mêmes consignes une fonction `lesJumeaux` prenant en argument un entier  $N$  et renvoyant la liste de tous les couples de nombres premiers jumeaux  $[p, q]$  tels que  $q \leq N$ .

Par exemple, `lesJumeaux(18)` retourne `[[3, 5], [5, 7], [11, 13]]` (le couple `[17, 19]` n'en fait pas partie).

**Exercice 3 : E3A - PC - 2017**

1. Ecrire une fonction `divise(p, q)` d'arguments deux entiers naturels non nuls  $p$  et  $q$ , renvoyant `True` si  $p$  divise  $q$  et `False` sinon.
2. Ecrire une fonction `estpremier(p)` d'argument un entier naturel  $p$ , renvoyant 1 si  $p$  est premier et 0 sinon.
3. Ecrire une fonction `phi(p)` d'argument un entier naturel  $p$ , renvoyant le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à  $p$ .

4. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on désigne par  $\varphi(n)$  le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à  $n$ .

Pour la suite de cet exercice, on admettra le résultat suivant, appelé théorème des nombres premiers :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n)\varphi(n)}{n} = 1$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on définit  $\Theta(n) = \left\lfloor \frac{\varphi(n)\ln(n)}{n} - 1 \right\rfloor$ .

- (a) Prouver que le théorème des nombres premiers implique qu'il existe une infinité de nombres premiers.
- (b) Ecrire une fonction `test(epsilon)` d'argument un réel  $\epsilon$  strictement positif, renvoyant le premier entier naturel  $n \geq 50$  tel que  $\Theta(n) \leq \epsilon$ .
- (c) Donner une suite d'instructions permettant de tracer le graphe de la fonction  $\Theta$  sur `[[50, 5000]]`.<sup>1</sup>

---

1. Afin de tester informatiquement la fonction, on se contentera de `[[50, 500]]`.