Chapitre 10 : Suites numériques

I Limite d'une suite réelle

1.1 Généralités

Définition 1

- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{R}$ ou tend vers l, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ ou $u_n \to l$, si et seulement si
$$\forall \varepsilon > 0\,,\, \exists N \in \mathbb{N}\,,\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies |u_n - l| \leq \varepsilon.$$
- On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge sinon.

Illustration :

Définition 2

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ ou tend vers $+\infty$, et on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $u_n \to +\infty$, si
$$\forall A \in \mathbb{R}\,,\, \exists N \in \mathbb{N}\,,\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \geq A.$$
- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge $-\infty$ ou tend vers $-\infty$, et on note $u_n \underset{n\to-\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ou $u_n \to -\infty$, si
$$\forall A \in \mathbb{R}\,,\, \exists N \in \mathbb{N}\,,\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq N \implies u_n \leq A.$$

Remarque : Une suite divergente peut : diverger vers $+\infty$, diverger vers $-\infty$, ou ne pas avoir de limite.

Illustration :

Proposition 1

Si la limite d'une suite (u_n) existe alors elle est unique. On la note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ ou $\lim u_n$.

Preuve.

□

➪ **Exemple 1 :** Montrons que : $\lim \dfrac{1}{n} = 0$.

➪ **Exemple 2 :** Soit (u_n) une suite réelle telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) est stationnaire.

1.2 Propriétés des suites convergentes

Proposition 2

Soient (u_n) une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l alors $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|l|$.

Preuve.

□

Remarque : La réciproque est fausse : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$. $(|u_n|)$ est constante égale à 1 donc converge vers 1 mais (u_n) est divergente.

Proposition 3

Toute suite réelle convergente est bornée.

Preuve.

□

Remarque : La réciproque est fausse : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n$. (u_n) est bornée mais divergente.

Proposition 4

Soient (u_n) une suite réelle et $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Si (u_n) admet une limite l alors :

- Pour tout $M > l$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geq N,\ u_n \leq M.$$
- Pour tout $m < l$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n \geq N,\ u_n \geq m.$$

Preuve.

□

Corollaire 1

Soit (u_n) une suite réelle.

- Si (u_n) converge vers $l > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.
- Si (u_n) converge vers $l < 0$, alors $u_n < 0$ à partir d'un certain rang.

➪ **Exemple 3 :** Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs telle que :

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \text{ avec } l < 1.$$

Montrer que : $\lim u_n = 0$.

1.3 Opérations sur les limites

Proposition 5

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites qui convergent respectivement vers $l, l' \in \mathbb{R}$.

- Alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l + l'$.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λl.
- $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ll'.
- Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}^*$, $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\dfrac{1}{l}$.

Preuve.

- Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \quad \Longrightarrow \quad |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \quad \Longrightarrow \quad |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$.
Soit $n \geq N$, on a :

$$\begin{aligned}
|u_n + v_n - (l + l')| &= |(u_n - l) + (v_n - l')| \\
&\leq |u_n - l| + |v_n - l'| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |(u_n + v_n) - (l + l')| \leq \varepsilon$.
Donc $(u_n + v_n)$ converge vers $l + l'$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$, par définition de la convergence, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1}.$$

Soit $n \geq N$, on a :

$$\begin{aligned}
|\lambda u_n - (\lambda l)| &= |\lambda(u_n - l)| \\
&\leq |\lambda| \times |u_n - l| \\
&\leq |\lambda| \times \frac{\varepsilon}{|\lambda| + 1} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Donc $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers λl.

- Comme (v_n) est convergente donc bornée, ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |v_n| \leq M.$$

Soit $\varepsilon > 0$, il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \quad \Longrightarrow \quad |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2M},$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \quad \Longrightarrow \quad |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2(|l| + 1)}.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$.
Soit $n \geq N$, on a :

$$\begin{aligned}
|u_n v_n - ll'| &= |(u_n - l)v_n + l(v_n - l')| \\
&\leq |u_n - l|.|v_n| + |l|.|v_n - l'| \quad \text{d'après l'inégalité triangulaire} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2M} M + |l| \frac{\varepsilon}{2(|l| + 1)} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

Ainsi : $\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \quad \Longrightarrow \quad |u_n v_n - ll'| \leq \varepsilon$.
Donc $(u_n v_n)$ converge vers ll'.

- Comme $(|u_n|)$ converge vers $|l|>0$, et $|l|>\frac{|l|}{2}$ alors, d'après la proposition 4, il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N_1 \Longrightarrow |u_n|>\frac{|l|}{2}$.
En particulier :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N_1 \Longrightarrow u_n\neq 0.$$
Soit $\varepsilon>0$, il existe $N_2\in\mathbb{N}$ tels que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N_2 \quad\Longrightarrow\quad |u_n-l|\leq\frac{\varepsilon l^2}{2},$$
Posons $N=\max(N_1,N_2)$.
Soit $n\geq N$, on a :
$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{u_n}-\frac{1}{l}\right| &= \left|\frac{l-u_n}{u_n l}\right|\\ &\leq \frac{|u_n-l|}{|u_n||l|}\\ &\leq \frac{2}{l^2}\frac{\varepsilon l^2}{2}\\ &\leq \varepsilon\end{aligned}$$
Ainsi : $\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N \quad\Longrightarrow\quad \left|\frac{1}{u_n}-\frac{1}{l}\right|\leq\varepsilon.$
Donc $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\frac{1}{l}$.

□

Proposition 6

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Alors $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Preuve. (v_n) est bornée donc il existe $M\in\mathbb{R}^{+*}$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ |v_n|\leq M$.
Soit $\varepsilon>0$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N \quad\Longrightarrow\quad |u_n|\leq\frac{\varepsilon}{M}.$$
Soit $n\geq N$, on a alors :
$$|u_nv_n|=|u_n|\times|v_n|\leq\frac{\varepsilon}{M}\times M\leq\varepsilon.$$
Ainsi $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. □

Proposition 7

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite minorée et si $\lim v_n=+\infty$, alors $\lim(u_n+v_n)=+\infty$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite majorée et si $\lim v_n=-\infty$, alors $\lim(u_n+v_n)=-\infty$.
- Si $\lim u_n=+\infty$ et si $\lim v_n=+\infty$, alors $\lim(u_n+v_n)=+\infty$.
- Si $\lim u_n=-\infty$ et si $\lim v_n=-\infty$, alors $\lim(u_n+v_n)=-\infty$.

Preuve.
- (u_n) est minorée donc il existe $m\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\geq m$.
Soit $A\in\mathbb{R}$. Comme $\lim v_n=+\infty$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N\Longrightarrow v_n\geq A-m$.
Soit $n\geq N$. On a alors : $u_n+v_n\geq m+A-m=A$.
Ainsi, $\lim(u_n+v_n)=+\infty$.
- (u_n) est majorée donc il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\leq M$.
Soit $A\in\mathbb{R}$. Comme $\lim v_n=-\infty$, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N\Longrightarrow v_n\leq A-M$.
Soit $n\geq N$. On a alors : $u_n+v_n\leq M+A-M=A$.
Ainsi, $\lim(u_n+v_n)=-\infty$.
- Soit $A\in\mathbb{R}$. Comme $\lim u_n=+\infty$, il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N_1\Longrightarrow u_n\geq\frac{A}{2}$ et, comme $\lim v_n=+\infty$, il existe $N_2\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N_2\Longrightarrow v_n\geq\frac{A}{2}$.
Posons $N=\max(N_1,N_2)$. Soit $n\geq N$. On a alors : $u_n+v_n\geq\frac{A}{2}+\frac{A}{2}=A$.
Ainsi, $\lim(u_n+v_n)=+\infty$.
- Soit $A\in\mathbb{R}$. Comme $\lim u_n=-\infty$, il existe $N_1\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N_1\Longrightarrow u_n\leq\frac{A}{2}$ et, comme $\lim v_n=-\infty$, il existe $N_2\in\mathbb{N}$ tel que : $\forall n\in\mathbb{N},\ n\geq N_2\Longrightarrow v_n\leq\frac{A}{2}$.
Posons $N=\max(N_1,N_2)$. Soit $n\geq N$. On a alors : $u_n+v_n\leq\frac{A}{2}+\frac{A}{2}=A$.
Ainsi, $\lim(u_n+v_n)=-\infty$.

□

Proposition 8

- Si $\lim u_n=l\in\mathbb{R}^{+*}$ et si $\lim v_n=+\infty$, alors $\lim(u_n.v_n)=+\infty$.
- Si $\lim u_n=l\in\mathbb{R}^{-*}$ et si $\lim v_n=+\infty$, alors $\lim(u_n.v_n)=-\infty$.
- Si $\lim u_n=l\in\mathbb{R}^{+*}$ et si $\lim v_n=-\infty$, alors $\lim(u_n.v_n)=-\infty$.
- Si $\lim u_n=l\in\mathbb{R}^{-*}$ et si $\lim v_n=-\infty$, alors $\lim(u_n.v_n)=+\infty$.

Preuve.

- Comme $\lim u_n = l \in \mathbb{R}^{+*}$ et $0 < \frac{l}{2} < l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_1,\ u_n \geq \frac{l}{2} > 0$.
  Soit $A \in \mathbb{R}$, comme $\lim v_n = +\infty$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \Longrightarrow v_n \geq \dfrac{2|A|}{l} \geq 0$.
  Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geq N$. On a alors : $u_n.v_n \geq \frac{l}{2}\dfrac{2|A|}{l} = |A| \geq A$..
  Ainsi, $\lim(u_n.v_n) = +\infty$.
- Comme $\lim u_n = l \in \mathbb{R}^{-*}$ et $l < \frac{l}{2} < 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_1,\ u_n \leq \frac{l}{2} < 0$.
  Soit $A \in \mathbb{R}$, comme $\lim v_n = +\infty$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \Longrightarrow v_n \geq -\dfrac{2|A|}{l} \geq 0$.
  Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geq N$. On a alors : $(-u_n).v_n \geq \left(-\frac{l}{2}\right)\left(-\dfrac{2|A|}{l}\right) = |A| \geq -A$.. Donc $u_n.v_n \leq A$.
  Ainsi, $\lim(u_n.v_n) = -\infty$.
- Comme $\lim u_n = l \in \mathbb{R}^{+*}$ et $0 < \frac{l}{2} < l$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_1,\ u_n \geq \frac{l}{2} > 0$.
  Soit $A \in \mathbb{R}$, comme $\lim v_n = -\infty$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \Longrightarrow v_n \leq -\dfrac{2|A|}{l} \leq 0$.
  Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geq N$. On a alors : $u_n.(-v_n) \geq \frac{l}{2}\dfrac{2|A|}{l} = |A| \geq -A$.. Donc $u_n.v_n \leq A$.
  Ainsi, $\lim(u_n.v_n) = -\infty$.
- Comme $\lim u_n = l \in \mathbb{R}^{-*}$ et $l < \frac{l}{2} < 0$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_1,\ u_n \leq \frac{l}{2} < 0$.
  Soit $A \in \mathbb{R}$, comme $\lim v_n = -\infty$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \Longrightarrow v_n \leq \dfrac{2|A|}{l} \leq 0$.
  Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geq N$. On a alors : $u_n.v_n = (-u_n).(-v_n) \geq \left(-\frac{l}{2}\right)\left(-\dfrac{2|A|}{l}\right) = |A| \geq A$..
  Ainsi, $\lim(u_n.v_n) = +\infty$.

□

Proposition 9

- Si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = +\infty$, alors $\lim(u_n.v_n) = +\infty$.
- Si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim(u_n.v_n) = -\infty$.
- Si $\lim u_n = -\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim(u_n.v_n) = +\infty$.

Preuve.

- Soit $A \in \mathbb{R}$, comme $\lim u_n = +\infty$, il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Longrightarrow u_n \geq \sqrt{|A|} \geq 0$.
  Comme $\lim v_n = +\infty$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \Longrightarrow v_n \geq \sqrt{|A|} \geq 0$.
  Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geq N$. On a alors : $u_n.v_n \geq \sqrt{|A|}.\sqrt{|A|} = |A| \geq A$..
  Ainsi, $\lim(u_n.v_n) = +\infty$.
- Si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = +\infty$ et $\lim(-v_n) = +\infty$ donc, d'après le point précédent $\lim(u_n.(-v_n)) = +\infty$. Ainsi, d'après la proposition précédente, $\lim(u_n.v_n) = -\infty$.
- Si $\lim u_n = -\infty$ et si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim(-u_n) = +\infty$ et $\lim(-v_n) = +\infty$ donc, d'après le premier point $\lim((-u_n).(-v_n)) = +\infty$. Ainsi, $\lim(u_n.v_n) = +\infty$.

□

Proposition 10

- Si $\lim u_n = +\infty$, alors $\lim \frac{1}{u_n} = 0$.
- Si $\lim u_n = -\infty$, alors $\lim \frac{1}{u_n} = 0$.
- Si $\lim u_n = 0$ et si : $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n > 0$, alors $\lim \frac{1}{u_n} = +\infty$.
- Si $\lim u_n = 0$ et si : $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n < 0$, alors $\lim \frac{1}{u_n} = -\infty$.

Preuve.

- Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim u_n = +\infty$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow u_n \geq \frac{1}{\varepsilon} > 0$.
  Soit $n \geq N$, on a alors : $\left|\frac{1}{u_n}\right| = \frac{1}{u_n} \leq \varepsilon$. Donc : $\lim \frac{1}{u_n} = 0$.
- Si $\lim u_n = -\infty$, alors $\lim(-u_n) = +\infty$, donc, d'après le point précédent $\lim \frac{1}{-u_n} = 0$ ainsi $\lim \frac{1}{u_n} = 0$.
- Supposons qu'il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_1,\ u_n > 0$.
  Soit $A \in \mathbb{R}$. Comme $\lim u_n = 0$, il existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_2 \Longrightarrow |u_n| \leq \frac{1}{|A|+1}$.
  Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geq N$, on a : $\dfrac{1}{u_n} = \dfrac{1}{|u_n|} \geq |A| + 1 \geq A$. Donc $\lim \frac{1}{u_n} = +\infty$.
- Si $\lim u_n = 0$ et si : $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ u_n < 0$, alors : $\exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ -u_n > 0$, donc, d'après le point précédent $\lim \frac{1}{-u_n} = +\infty$ ainsi $\lim \frac{1}{u_n} = -\infty$.

□

Remarque : Si $\lim u_n = 0$, on ne peut pas dire que $\lim \frac{1}{u_n} = \pm\infty$ car la limite peut ne pas exister. Par exemple : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. On a $\lim u_n = 0$ mais $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{u_n} = (-1)^n n$ n'a pas de limite.

➪ **Exemple 4 :** Calculer :

- $\lim \dfrac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$

- $\lim \dfrac{\sin n^4}{n}$

- $\lim \dfrac{n - (-1)^n}{n + (-1)^n}$

- $\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$

- $\lim \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$

➪ **Exemple 5 :** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle qui converge vers $l \in \mathbb{R}$. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$

Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers l.
Ce résultat s'appelle le théorème de Césaro.

1.4 Passage à la limite dans les inégalités

Proposition 11

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes, vers l et l'. On a :

$$(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n) \Longrightarrow l \leq l'.$$

Preuve. Supposons que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et $l > l'$. Posons $\varepsilon = \frac{l-l'}{3} > 0$. Alors : il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \geq N_2 \Longrightarrow |v_n - l'| \leq \varepsilon.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geq N$, on a : $l - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq l' + \varepsilon$.
Or $l - \varepsilon = l - \frac{l-l'}{3} = \frac{2l+l'}{3}$ et $l' + \varepsilon = l' + \frac{l-l'}{3} = \frac{l+2l'}{3}$. Ainsi :

$$\frac{2l+l'}{3} \leq \frac{l+2l'}{3}.$$

Donc $2l + l' \leq l + 2l'$ et ainsi $l \leq l'$ ce qui est absurde. Donc :

$$l \leq l'.$$

□

Remarque : Les inégalités strictes ne sont pas conservées par passage à la limite. Par exemple, pour : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \frac{1}{n}$, $v_n = 1 + \frac{1}{n}$, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $u_n < v_n$ mais $\lim u_n = \lim v_n = 1$.

1.5 Existence de limite et inégalités

Théorème 1 : Théorème d'encadrement

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites vérifiant :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \leq w_n$
- Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$.

Alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_1 \Longrightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \geq N_2 \Longrightarrow |w_n - l| \leq \varepsilon.$$

Posons $N = \max(N_1, N_2)$. Soit $n \geq N$, on a :

$$-\varepsilon \leq u_n - l \leq v_n - l \leq w_n - l \leq \varepsilon.$$

Donc :

$$|v_n - l| \leq \varepsilon.$$

Ainsi $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$. □

Corollaire 2

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites réelles, soit $l \in \mathbb{R}$. On suppose que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq v_n \text{ et } \lim v_n = 0.$$

Alors :

$$\lim u_n = l.$$

Preuve. On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-v_n \leq u_n - l \leq v_n$ et $\lim(v_n) = \lim(-v_n) = 0$. Donc, par théorème d'encadrement, $\lim(u_n - l) = 0$. Ainsi :

$$\lim u_n = l.$$

□

Théorème 2

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

1. Si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
2. Si $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty \end{cases}$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Preuve.

1. Supposons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   Soit $A \in \mathbb{R}$. Il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N \Longrightarrow u_n \geq A$.
   Soit $n \geq N$, on a : $v_n \geq u_n \geq A$.
   Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
2. Supposons $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$.
   Alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(-v_n) \leq (-u_n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-v_n) = +\infty$.
   Donc, d'après le premier point : $\lim\limits_{n\to+\infty} (-u_n) = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

□

➪ **Exemple 6 :** Calculer :

- $\lim \dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}{\sqrt{n}}$

- $\lim u_n$ avec : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$

II Suites monotones

2.1 Borne supérieure, borne inférieure

Définition 3

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- Si A est majorée, soit F l'ensemble des majorants de A. Si F admet un minimum, alors ce minimum est appelé **borne supérieure de** A et est noté $\sup(A)$.
- Si A est minorée, soit G l'ensemble des majorants de A. Si G admet un maximum, alors ce maximum est appelé **borne inférieure de** A et est noté $\inf(A)$.

Par convention :

- Si A n'est pas majorée, on pose $\sup(A) = +\infty$.
- Si A n'est pas minorée, on pose $\inf(A) = -\infty$.

Proposition 12

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

- Si A admet un maximum, alors A admet une borne supérieure et on a : $\max(A) = \sup(A)$.
- Si A admet un minimum, alors A admet une borne inférieure et on a : $\min(A) = \inf(A)$.

Théorème 3

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.
Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Remarque : Toute partie non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

➪ **Exemple 7 :** Déterminer, si elles existent, les bornes supérieure et inférieure des ensembles suivants :

1. $A = \left\{\frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$,
2. $B = \left\{\frac{n-\frac{1}{n}}{n+\frac{1}{n}},\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

➪ **Exemple 8 :** Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$, soit $a \in \mathbb{R}$. On note :

$$-A = \{-x,\, x \in A\},$$

$$A + B = \{x + y,\, x \in A,\, y \in B\},$$

1. Montrer que $\sup(-A) = -\inf(A)$.
2. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

2.2 Théorème de la limite monotone

Théorème 4 : Théorème de la limite monotone

- Toute suite croissante et majorée de réels converge.
- Toute suite décroissante et minorée de réels converge.

Proposition 13

- Toute suite croissante et non majorée de réels diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée de réels diverge vers $-\infty$.

Remarque : Une suite non majorée ne diverge pas nécessairement vers $+\infty$. Ex : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n.n$.

➪ **Exemple 9 :** On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + e^{-k})$. Montrons que (u_n) converge.

Proposition 14

Soit $q \in \mathbb{R}$, posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n$.

- Si $|q| < 1$, alors $\lim u_n = 0$.
- Si $q = 1$, alors $\lim u_n = 1$.
- Si $q > 1$, alors $\lim u_n = +\infty$.
- Si $q \leq -1$, (u_n) n'a pas de limite.

2.3 Suites récurrentes d'ordre 1

Proposition 15

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$. On considère la suite définie par :

$$u_0 \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

On suppose que (u_n) converge vers $l \in I$ et que f est continue en l. Alors :

$$l = f(l).$$

Méthode 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que I **est stable par** f.
On considère la suite définie par :

$$u_0 \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n).$$

- Comme I est stable par f alors (u_n) est bien définie et est à valeurs dans I.
- Pour étudier la monotonie de (u_n), on peut :
  - Etudier le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$.
    En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = f(u_n) - u_n = u_{n+1} - u_n$. Donc la monotonie de (u_n) se déduit du signe de g.
  - Si f **est croissante**, on montre par récurrence que (u_n) est monotone. Plus précisément :
    - Si $u_0 \leq u_1$, alors (u_n) est croissante,
    - Si $u_0 \geq u_1$, alors (u_n) est décroissante.

    Il faut donc connaître le signe de $u_1 - u_0$:
    - Si u_0 est donné de façon explicite, on calcule u_1 et on en déduit le signe de $u_1 - u_0$.
    - Sinon, on étudie le signe de $g : x \mapsto f(x) - x$, et on utilise $u_1 - u_0 = g(u_0)$.

  On sait donc que (u_n) est monotone.
- Pour étudier la convergence de (u_n).
  - Si I est borné, comme (u_n) est à valeurs dans I, alors (u_n) est bornée. Et comme (u_n) est monotone, (u_n) est convergente.
  - Si I n'est pas borné.
    - On regarde si on ne peut pas trouvé un autre intervalle stable qui soit borné.
    - Sinon, on raisonne par l'absurde et on suppose que (u_n) est convergente. On applique alors la suite de la méthode en espérant obtenir une contradiction.

    On sait donc que (u_n) converge. Posons $l = \lim u_n$.
- Si **f est continue sur** I **et** $l \in I$, alors, comme : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, on a, par passage à la limite : $f(l) = l$.
  On résout donc l'équation $f(l) = l$. Si l'équation admet plusieurs solutions dans I, on utilise la monotonie de (u_n) pour trouver la valeur de la limite.

➪ **Exemple 10 :** Etudier la convergence des suites définies par :

- $u_0 = \frac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right)$.
- $u_0 \in \mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n.e^{-u_n}$.

2.4 Théorème des suites adjacentes

Définition 4

On dit que deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes si :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante
- $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante
- $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition 16

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites adjacentes avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante. Alors :

$$\forall n, p \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_p.$$

Théorème 5

Deux suites adjacentes sont convergentes et ont la même limite.

➪ **Exemple 11 :** Montrer que les suites suivantes sont adjacentes :
$u_0 = 0$, $v_0 = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n+2v_n}{3}$

2.5 Approximations décimales d'un réel

Proposition 17

Soit $x \in \mathbb{R}$, posons :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n} \text{ et } b_n = \frac{\lfloor 10^n x\rfloor + 1}{10^n}.$$

Alors, les suites (a_n) et (b_n) sont des suites adjacentes et :

$$\lim a_n = \lim b_n = x.$$

Remarque : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n et b_n sont des nombres décimaux et $a_n \leq x \leq b_n$ et, de plus, $b_n - a_n = 10^{-n}$.
On dit que $a_n = \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$ est une approximation décimale de x à 10^{-n} près par défaut et que $b_n = \frac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$ est une approximation décimale de x à 10^{-n} près par excès.

Corollaire 3

Tout réel est limite d'une suite de rationnels.

III Suites extraites

3.1 Définition

Définition 5

On appelle suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou encore sous-suite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$) toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante.

Remarque : (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont des suites extraites de (u_n).

3.2 Limite

Théorème 6

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite l (finie ou infinie), alors toutes ses suites extraites convergent la même limite l.

Corollaire 4

Soit (u_n) une suite de nombres réels.

- Si (u_n) admet une suite extraite divergente, alors (u_n) diverge.
- Si (u_n) admet deux suites extraites convergeant vers des limites distinctes, alors (u_n) n'a pas de limite.

➪ **Exemple 12 :**

- $((-1)^n)$ n'a pas de limite.
- $(u_n) = (\sqrt{n} - \lfloor \sqrt{n} \rfloor)$ n'a pas de limite.

Proposition 18

Soit (u_n) une suite de nombres réels. Si les suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) possède une même limite l (finie ou infinie) alors (u_n) converge vers l.

IV Suites complexes

4.1 Convergence

Définition 6

Soit (z_n) une suite complexe

- La partie réelle de la suite (z_n) est la suite réelle (x_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = \operatorname{Re}(z_n).$$

- La partie imaginaire de la suite (z_n) est la suite réelle (y_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_n = \operatorname{Im}(z_n).$$

Définition 7

- On dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l \in \mathbb{C}$ ssi :

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists N \in \mathbb{N}\,,\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n \geq N \implies |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

- On dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ssi il existe un réel $l \in \mathbb{C}$ tel que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l.

Proposition 19

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe et $l \in \mathbb{C}$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l si et seulement si $(\operatorname{Re}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\operatorname{Im}(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers $\operatorname{Re}(l)$ et $\operatorname{Im}(l)$.

4.2 Suites bornées

Définition 8

On dit qu'une suite complexe $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ssi :

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M.$$

Proposition 20

Toute suite complexe convergente est bornée.

4.3 Opérations sur les suites complexes

Proposition 21

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites complexes qui convergent respectivement vers $l \in \mathbb{C}$ et $l' \in \mathbb{C}$.

- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $(\lambda u_n + \mu v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda l + \mu l'$.
- $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ll'.
- Si (u_n) converge vers $l \in \mathbb{C}$ et (v_n) converge vers $l' \in \mathbb{C}^*$, $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à partir d'un certain rang et converge vers $\dfrac{l}{l'}$.

4.4 Suites géométriques

Proposition 22

Soit $q \in \mathbb{C}$, posons : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = q^n$.
- Si $|q| < 1$, alors $\lim u_n = 0$.
- Si $q = 1$, alors $\lim u_n = 1$.
- Si $q \in \mathbb{R}$ et $q > 1$, alors $\lim u_n = +\infty$.
- Sinon, (u_n) n'a pas de limite.

➪ **Exemple 13 :** On pose :

$$z_0 \in \mathbb{C} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \frac{1}{3}(2z_n - \overline{z_n}).$$

Etudier la convergence de (z_n).

En résumé :

Ce qui reste valable :	**Ce qui n'est plus valable :**
Unicité de la limite	Monotonie
Une suite convergente est bornée	Majorant/minorant
Opérations sur les limites	Limites infinies
Résultats sur les suites extraites	Passage à la limite dans les inégalités larges
Résultats sur les suites arithmétiques	Théorème de convergence par encadrement
Résultats sur les suites géométriques	Théorèmes de divergence par minoration/majoration
Résultats sur les suites arithmético-géométriques	Théorème de la limite monotone
Résultats sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2	Suites adjacentes