

Chapitre 13 : Dérivabilité

Dans tout le chapitre I désignera un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point.

I Nombre dérivé, fonction dérivée

1.1 Dérivabilité en un point, nombre dérivée

Définition 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soient $x, a \in I$ avec $x \neq a$. Le taux d'accroissement entre x et a est le rapport :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Remarque : Le taux d'accroissement est la pente de la sécante entre les points d'abscisses x et a .

Définition 2

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est dérivable en a si et seulement si son taux d'accroissement en a :

$$\begin{aligned} I \setminus \{a\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{aligned}$$

admet une limite finie en a . Cette limite, lorsqu'elle existe, est appelé nombre dérivée de f en a . Il est noté $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Remarque :

- Le nombre dérivée est la pente de la tangente au point d'abscisse a .
- L'équation de la tangente au point d'abscisse a est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

- Par composition des limites, on a :

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Ainsi :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h),$$

avec : $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$.

Il s'agit du développement limité de f à l'ordre 1 en a .

⇔ **Exemple 1 :** Soit $a \in \mathbb{R}$, soit $f : x \mapsto x^n$. Etudions la dérivabilité de f en a .

Proposition 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$.

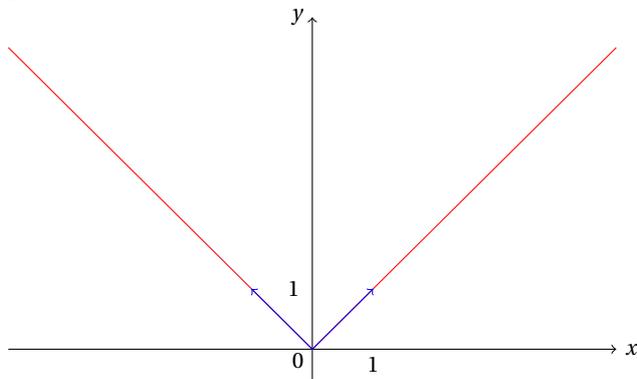
Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Preuve.

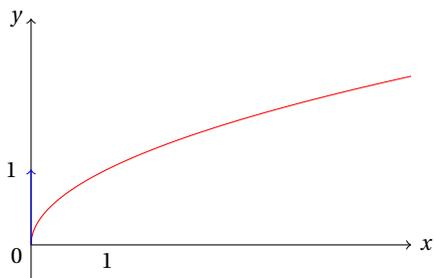
□

Remarque : La réciproque est fautive :

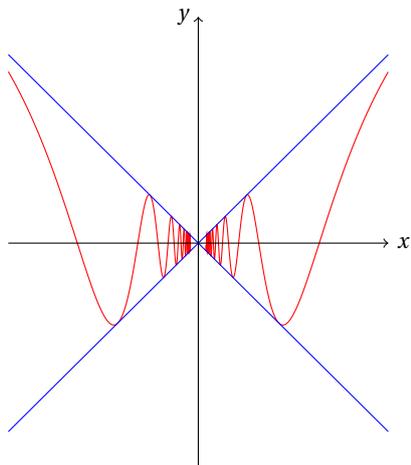
- $f : x \mapsto |x|$,



- $f : x \mapsto \sqrt{x}$,



- $f : x \mapsto \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$,



⇨ **Exemple 2 :** Soit $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ f est-elle dérivable en 0?

1.2 Dérivabilité à gauche, à droite

Définition 3

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

On dit que f est dérivable à droite (resp. à gauche) en a ssi $x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en a . Cette limite, si elle existe, est alors notée $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$) et est appelée dérivée à droite (resp. à gauche) de la fonction f en a :

$$f'_d(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ et } f'_g(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Proposition 2

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$ qui n'est pas une extrémité. On a l'équivalence :

$$f \text{ est dérivable en } a \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à gauche en } a \\ f \text{ est dérivable à droite en } a \\ f'_g(a) = f'_d(a) \end{cases}$$

Dans ce cas, on a : $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

⇨ **Exemple 3 :** Posons : $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{sinon.} \end{cases}$ Etudions la dérivabilité de f en 0.

1.3 Fonction dérivée

Définition 4

• On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I ssi f est dérivable en tout point de I . On définit alors la fonction dérivée de f notée f' , par : $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f'(x)$.

• On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable à droite (resp. à gauche) sur I ssi f est dérivable à droite (resp. à gauche) en tout point de I . On définit alors la fonction dérivée à droite (resp. à gauche) de f notée f'_d (resp. f'_g), par :
 f'_d (resp. f'_g) : $I \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f'_d(x)$ (resp. $f'_g(x)$).

Proposition 3

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur I , elle est continue sur I .

1.4 Opérations sur les dérivées**Proposition 4**

Soit f et $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en $a \in I$:

- Pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $(\lambda f + \mu g)$ est dérivable en a et on a :

$$(\lambda f + \mu g)'(a) = \lambda f'(a) + \mu g'(a).$$

- fg est dérivable en a et on a :

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

- Si de plus, $g(a) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ est dérivable en a et on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}.$$

Preuve.

□

Proposition 5

Soient I et J deux intervalles non vides et non réduits à un point. Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Soit $a \in I$. Si f est dérivable en $a \in I$ et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et on a :

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a)).$$

Preuve.

□

Théorème 1

Soient $a \in I$, $f : I \rightarrow J$ continue, bijective et dérivable en a .

$f^{-1} : J \rightarrow I$ est dérivable en $b = f(a)$ si, et seulement si $f'(a) \neq 0$

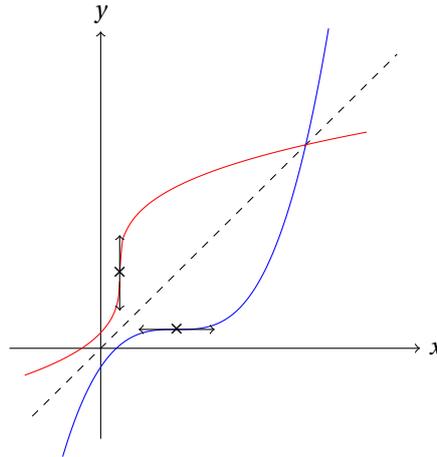
et dans ce cas :

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

Preuve.

□

Remarque : L'annulation de la dérivée de f correspond à l'existence d'une tangente horizontale. Pour f^{-1} , cette tangente devient verticale, c'est pourquoi il y a un problème de non dérivabilité.



II Propriétés des fonctions dérivables

2.1 Extremum local et point critique

Définition 5

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

- On dit que f admet un maximum local en a , si et seulement si il existe un réel $r > 0$ tel que la fonction $f|_{I \cap]a-r, a+r[}$ admette un maximum en a , i.e :

$$\forall x \in I \cap]a-r, a+r[, f(x) \leq f(a)$$

- On dit que f admet un minimum local en a , si et seulement si il existe un réel $r > 0$ tel que la fonction $f|_{I \cap]a-r, a+r[}$ admette un minimum en a , i.e :

$$\forall x \in I \cap]a-r, a+r[, f(a) \leq f(x)$$

- On dit que f admet un extremum local en a , si et seulement si f admet un maximum local en a ou un minimum local en a .

Définition 6

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$.

On dit que a est un point critique de f ssi f est dérivable en a et :

$$f'(a) = 0.$$

Théorème 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} . Si :

- $a \in I$ et a n'est pas une extrémité de I ,
 - la fonction f est dérivable en a ,
 - la fonction f admet un extremum local en a ,
- alors a est un point critique de f c'est-à-dire : $f'(a) = 0$.

Remarque :

- Le résultat est faux si a est une extrémité de I . Par exemple : $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ et $a = 1$.
- la réciproque est fautive. Par exemple : $x \mapsto x^3$ et $a = 0$.

Preuve.

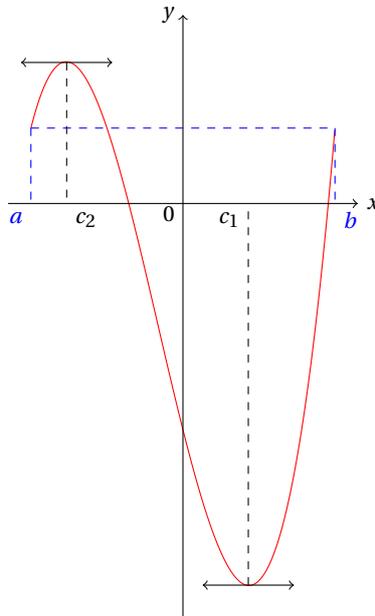
□

2.2 Théorème de Rolle

Théorème 3 : Théorème de Rolle

Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque : Le théorème de Rolle est un théorème d'existence mais pas d'unicité.



Preuve.

□

⇨ **Exemple 4 :** Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $f(-1) = f(0) = f(1) = 0$. On pose :

$$\begin{aligned} g : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x^4 + x + f(x). \end{aligned}$$

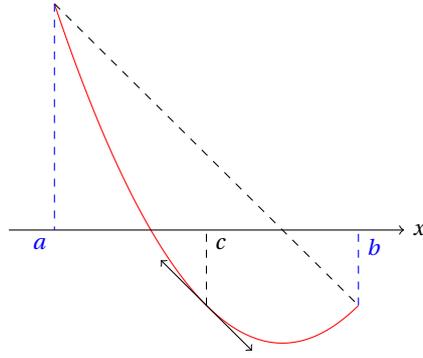
Montrer qu'il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $g'(c) = 0$.

2.3 Accroissement finis

Théorème 4 : Egalité des accroissements finis

Soient a et b deux réels avec $a < b$. Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$



Preuve.

□

⇔ **Exemple 5 :** Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable telle que $f(0) = 0$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \exists c \in \mathbb{R}^{+*}, f(2x) = 2x f'(c).$$

Proposition 6 : Inégalité des accroissements finis

Soit f dérivable sur I . Supposons qu'il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in I$, $m \leq f'(x) \leq M$, alors :

$$\forall x, y \in I, x > y, m(x - y) \leq f(x) - f(y) \leq M(x - y).$$

Remarque : Si f est \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, alors comme f' est continue sur un segment, f' est bornée. On peut donc appliquer l'inégalité des accroissements finis.

Preuve.

□

Définition 7

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, soit $K \geq 0$. On dit que f est K -lipschitzienne ssi :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq K|x - y|.$$

Corollaire 1 : Inégalité des accroissements finis

Soit f dérivable sur I . Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$, alors f est M -lipschitzienne :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Preuve.

□

⇔ **Exemple 6 :** Montrer que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, |\operatorname{Arctan}(x) - \operatorname{Arctan}(y)| \leq |x - y|.$$

⇔ **Exemple 7 :** Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} \leq \sqrt{n} - \sqrt{n-1}.$$

Méthode 1

Soit $f : I \rightarrow I$ dérivable sur I . Supposons qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que :

$$\forall x \in I, |f'(x)| \leq k.$$

Supposons que $l \in I$ soit un point fixe de f , c'est-à-dire que $f(l) = l$.

On considère la suite définie par :

$$u_0 \in I \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Alors, en appliquant l'inégalité des accroissements finis entre u_n et l , pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - l| = |f(u_n) - f(l)| \leq k|u_n - l|.$$

Ainsi, par récurrence, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|.$$

Comme $|k| < 1$, on a $\lim k^n = 0$ donc :

$$\lim u_n = l.$$

Remarque :

- Cette méthode permet d'étudier la convergence sans étudier la monotonie.
- L'hypothèse $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$ avec $k < 1$ n'est pas équivalente à $\forall x \in I, |f'(x)| < 1$.
- u_n est une valeur approchée de l à $k^n \cdot (b - a)$ si $I = [a, b]$.
- (u_n) tend vers l à la même vitesse que la suite géométrique (k^n) .

⇨ **Exemple 8 :** On définit la suite (u_n) par : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = e^{-u_n}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\frac{1}{e}, 1\right].$$

Montrer que (u_n) converge. On note l sa limite. Comment obtenir une valeur approchée de l à 10^{-3} près?

2.4 Fonctions monotones

Proposition 7

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- f est constante sur $[a, b]$ si et seulement si $\forall x \in]a, b[, f'(x) = 0$.
- f est croissante sur $[a, b]$ si et seulement si $\forall x \in]a, b[, f'(x) \geq 0$.
- f est décroissante sur $[a, b]$ si et seulement si $\forall x \in]a, b[, f'(x) \leq 0$.

Remarque : L'hypothèse d'intervalle est fondamentale, par exemple $x \mapsto \frac{1}{x}$ a une dérivée négative sur \mathbb{R}^* mais n'est pas décroissante sur \mathbb{R}^* et $x \mapsto \text{Arctan } x + \text{Arctan } \frac{1}{x}$ a une dérivée nulle sur \mathbb{R}^* mais n'est pas constante sur \mathbb{R}^* .

Théorème 5

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Supposons f monotone sur $[a, b]$.

Alors f est strictement monotone sur $[a, b]$ ssi $\{x \in]a, b[, f'(x) = 0\}$ ne contient pas d'intervalle de la forme $]a, \beta[$ avec $\alpha < \beta, \alpha, \beta \in]a, b[$.

Corollaire 2

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

Si f' est strictement positive (resp. strictement négative), sauf éventuellement en un nombre fini de points de $]a, b[$ où f' s'annule, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante).

2.5 Théorème de la limite de la dérivée

Théorème 6 : Théorème de la limite de la dérivée

Soit $a \in I$. Soit f une fonction continue sur I et f dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l.$$

Corollaire 3

Soit $a \in I$. Soit f une fonction continue sur I et f dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si $\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.

Remarque :

- La réciproque est fautive : $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$, f est dérivable en 0 et f' n'a pas de limite en 0.
- Le corollaire implique que f' est continue en a .

⇨ **Exemple 9 :** Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R}^+

⇨ **Exemple 10 :** Résoudre l'équation différentielle sur \mathbb{R} :

$$xy' - 2y = (x - 1)(x + 1)^3.$$

III Fonctions de classe \mathcal{C}^k

3.1 Définition

Définition 8

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- On pose $f^{(0)} = f$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que la fonction $f^{(k)} : I \rightarrow \mathbb{R}$ existe et qu'elle est dérivable sur I . On note alors $f^{(k+1)}$ la dérivée de $f^{(k)}$, c'est à dire : $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.

Si pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f^{(n)}$ existe, on dit alors que f est n fois dérivable sur I , et on appelle $f^{(n)}$ la dérivée n -ième de f sur I .

On dit que f est indéfiniment dérivable sur I ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n -fois dérivable sur I .

Définition 9

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^n sur I ssi f est n -fois dérivable sur I , et $f^{(n)}$ est continue sur I .

On note $\mathcal{C}^n(I)$ ou $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^n .

- On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur I ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe \mathcal{C}^n sur I .

On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ ou $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^∞ .

3.2 Opérations sur les fonctions \mathcal{C}^k

Proposition 8

Soient $k \in \mathbb{N}$, $f, g \in \mathcal{C}^k(I)$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Alors $\lambda f + \mu g \in \mathcal{C}^k(I)$ et $(\lambda f + \mu g)^{(k)} = \lambda f^{(k)} + \mu g^{(k)}$.

Proposition 9 : Formule de Leibniz

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f, g \in \mathcal{C}^n(I)$. Alors $fg \in \mathcal{C}^n(I)$ et on a

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

⇔ **Exemple 11** : Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée n -ième de :

$$f : x \mapsto e^{2x}(x+2).$$

Proposition 10

Soient $k \in \mathbb{N}$ et I et J deux intervalles non vides et non réduits à un point. Soient $f \in \mathcal{C}^k(I)$ et $g \in \mathcal{C}^k(J)$ telles que $f(I) \subset J$. Alors $(g \circ f) \in \mathcal{C}^k(I)$.

Preuve. • Pour $k = 0$, soient $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et $g \in \mathcal{C}^0(J)$ telles que $f(I) \subset J$. Alors, par continuité de la composée d'applications continues, on a : $(g \circ f) \in \mathcal{C}^0(I)$.

- Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons le résultat vrai pour les fonctions de classe \mathcal{C}^k .

Soient $f \in \mathcal{C}^{k+1}(I)$ et $g \in \mathcal{C}^{k+1}(J)$ telles que $f(I) \subset J$.

Alors f et g sont dérivables, donc $g \circ f$ est dérivable et : $(g \circ f)' = f' \cdot g' \circ f$.

Or $g' \in \mathcal{C}^k(J)$ et $f \in \mathcal{C}^k(I)$ donc, par hypothèse de récurrence : $(g' \circ f) \in \mathcal{C}^k(I)$.

De plus, $f' \in \mathcal{C}^k(I)$, donc par produit :

$$(g \circ f)' = f' \cdot g' \circ f \in \mathcal{C}^k(I).$$

Ainsi : $(g \circ f) \in \mathcal{C}^{k+1}(I)$.

- D'où la preuve par récurrence.

□

Proposition 11

Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient $f, g \in \mathcal{C}^k(I)$. Si g ne s'annule pas sur I , alors $\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^k(I)$.

Preuve. • Posons $h: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$, on a : $h \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^*)$. De plus, $g \in \mathcal{C}^k(I)$ et, comme g ne s'annule pas sur I , $g(I) \subset \mathbb{R}^*$, donc, d'après la proposition précédente :

$$h \circ g = \frac{1}{g} \in \mathcal{C}^k(I).$$

• $f \in \mathcal{C}^k(I)$ et $\frac{1}{g} \in \mathcal{C}^k(I)$ donc, par produit :

$$\frac{f}{g} \in \mathcal{C}^k(I).$$

□

⇨ **Exemple 12 :** Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :

$$f: x \mapsto \frac{1}{1-x}.$$

Proposition 12

Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit $f: I \rightarrow J$ une bijection de classe \mathcal{C}^k . Alors f^{-1} est de classe \mathcal{C}^k sur J si et seulement si f' ne s'annule pas sur I .

Remarque : Il n'y a pas besoin d'hypothèse de non annulation de f'', f''', \dots

Preuve. • Pour $k = 1$, soit $f: I \rightarrow J$ est bijective, de classe \mathcal{C}^1 sur I .
On sait que f^{-1} est dérivable sur J ssi f' ne s'annule pas sur I . De plus, dans ce cas :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Or f' est continue et ne s'annule pas sur I , et f^{-1} continue (car dérivable), donc $(f^{-1})'$ est continue comme quotient et composée de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas. Ainsi f^{-1} est \mathcal{C}^1 sur J .

• Soit $k \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat vrai pour les fonctions \mathcal{C}^k .

Soit $f: I \rightarrow J$ est bijective, de classe \mathcal{C}^{k+1} sur I .

Alors f^{-1} est de classe \mathcal{C}^k sur J ssi f' ne s'annule pas sur I . De plus, dans ce cas :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Or f' est de classe \mathcal{C}^k sur I et ne s'annule pas sur I , et f^{-1} est de classe \mathcal{C}^k sur J , donc $(f^{-1})'$ est de classe \mathcal{C}^k sur J comme quotient et composée de fonctions qui le sont, le dénominateur ne s'annulant pas. Ainsi f^{-1} est \mathcal{C}^{k+1} sur J .

• D'où la preuve par récurrence.

□

IV Fonctions convexes

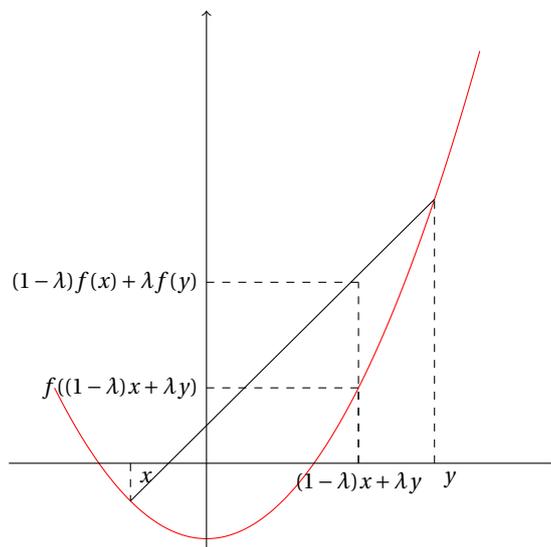
4.1 Généralités

Définition 10

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est convexe ssi :

$$\forall x, y \in I, \forall \lambda \in [0, 1], f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)f(x) + \lambda f(y).$$

Remarque : $\{(1-\lambda)x + \lambda y, \lambda \in [0, 1]\} = [x, y]$



⇔ **Exemple 13:** Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|$. Montrer que f est convexe.

Proposition 13

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe.

Pour tout $a \in I$ la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $I \setminus \{a\}$.

Proposition 14

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

Pour tous $x, y \in I$, la courbe représentative de f sur $[x, y]$ est en-dessous de sa sécante sur $[x, y]$, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in I, x < y, \forall t \in [x, y], f(t) \leq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}(t-x) + f(x).$$

Pour tous $x, y \in I$, la courbe représentative de f en dehors de $[x, y]$ est au-dessus de sa sécante en dehors de $[x, y]$, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in I, x < y, \forall t \notin [x, y], f(t) \geq \frac{f(x)-f(y)}{x-y}(t-x) + f(x).$$

⇔ **Exemple 14:** Toute fonction convexe sur un intervalle ouvert est continue.

4.2 Convexité et fonctions dérivables

Proposition 15

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) f est convexe,
- (ii) f' est croissante sur I ,
- (iii) la courbe représentative de f est située au-dessus de ses tangentes, c'est-à-dire :

$$\forall x, a \in I, f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a).$$

Remarque : Une fonction convexe n'est pas toujours dérivable. Par exemple : $f : x \mapsto |x|$ est convexe mais non dérivable en 0.

Corollaire 4

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

f est convexe ssi $f'' \geq 0$ sur I .

⇔ **Exemple 15:**

1. Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto -\ln x$. f est convexe.
2. Montrons que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \ln(x) \leq x - 1$$

⇨ **Exemple 16 :**

1. La fonction $-\sin$ est convexe sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Montrons que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x.$$

V Fonctions complexes

5.1 Généralités

Définition 11

- On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est dérivable en $a \in I$ ssi son taux d'accroissement en a :

$$\begin{array}{l} I \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C} \\ x \mapsto \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

admet une limite (finie) quand x tend vers a . On appelle alors dérivée de f en a et on note $f'(a)$ cette limite.

- On dit que f est dérivable sur I ssi f est dérivable en tout point de I .

Proposition 16

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ et $a \in I$. f est dérivable en a si et seulement si $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont dérivables en a , et on a alors :

$$f'(a) = \operatorname{Re}(f)'(a) + i\operatorname{Im}(f)'(a).$$

Remarque :

- Les résultats d'opérations sur les dérivées, dont la formule de Leibnitz, restent valables pour les fonctions à valeurs complexes.
- Les résultats sur la monotonie et sur les extremums n'ont plus de sens pour les fonctions à valeurs complexes.

5.2 Inégalité des accroissements finis

Proposition 17 : Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur I . Supposons qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$, alors :

$$\forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

Remarque : Le théorème de Rolle est faux pour les fonctions à valeurs complexes, par exemple : $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $x \mapsto e^{ix}$. Il en est de même pour l'égalité des accroissements finis. Cependant, l'inégalité des accroissements finis est vraie.

Preuve.

□