Chapitre 14 : Polynômes

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

1.1 Définition

Définition 1

- On appelle **polynôme** P à coefficients dans $\mathbb{K}$ tout objet de la forme :

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

  où $n \in \mathbb{N}$, $a_0, ..., a_n \in \mathbb{K}$.
- On dit que $a_0, ..., a_n$ sont les coefficients de P et que X est l'indéterminée.
- L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Remarque : X est un objet formel qui ne nécessite pas d'être défini avec des quantificateurs. Il ne peut pas prendre de valeurs, donc on ne peut pas poser $X = a$.

Remarque : La vérité sur les polynômes : un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une suite de $\mathbb{K}$ à support fini, c'est-à-dire une suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$ telle que :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}, k \geq N \Longrightarrow a_k = 0.$$

- On appelle polynôme nul et on note 0 le polynôme défini par la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k = 0.$$

- On appelle polynôme constant égal à 1 et on note 1 le polynôme défini par la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$a_0 = 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}^*, a_k = 0.$$

- On appelle indéterminée et on note X le polynôme défini par la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$a_1 = 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}, a_k = 0,$$

  c'est-à-dire :

$$\forall k \in \mathbb{N}, a_k = \delta_{k,1}.$$

- On peut montrer, en utilisant les définitions des opérations qui suivent que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme X^n (défini par récurrence) est la suite $(\delta_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{K}$.
- On a alors, si P est la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq N \Longrightarrow a_k = 0$, avec $N \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} P &= \sum_{n=0}^{N} a_n (0, \dots, 0, 1, 0, 0, \dots) \text{ où 1 est le terme n} \\ &= \sum_{n=0}^{N} a_n X^n \end{aligned}$$

  On a donc retrouvé l'écriture classique des polynômes.

Définition 2

On dit que deux polynômes $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coefficients :

$$P = Q \iff \forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = b_k$$

Remarque :

- Si $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ avec $m \leq n$, on peut écrire : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ en posant : $\forall k > m$, $a_k = 0$. La borne haute de la somme peut donc être augmentée si nécessaire. C'est pourquoi, on peut supposer que $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ sans perdre de généralité.
- On a, en particulier : un polynôme est nul ssi ses coefficients sont nuls.

1.2 Opérations algébriques dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 3

Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On définit :

- la combinaison linéaire : $\lambda P + \mu Q = \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (\lambda a_k + \mu b_k) X^k$
  où on pose $a_k = 0$ si $k > n$ et $b_k = 0$ si $k > m$.
- le produit : $P.Q = \sum_{k=0}^{n+m} c_k X^k$ où : $\forall k \in [\![0, n+m]\!],\ c_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$.

Remarque : La formule du produit correspond bien à la formule "naturelle". Par exemple, pour $P = X^2 - 1$ et $Q = X + 3$. On a :

$$PQ = (X^2-1)(X+3) = X^3 + 3X^2 - X - 3.$$

Ceci est cohérent avec la formule de la définition car, ici, on a : $a_0 = -1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $\forall k > 2$, $a_k = 0$, $b_0 = 3$, $b_1 = 1$ et $\forall k > 1$, $b_k = 0$. Ainsi :

- $c_0 = a_0.b_0 = -3$,
- $c_1 = a_0.b_1 + a_1.b_0 = -1 + 0 = -1$,
- $c_2 = a_0.b_2 + a_1.b_1 + a_2.b_0 = 0 + 0 + 3 = 3$,
- $c_3 = a_0.b_3 + a_1.b_2 + a_2.b_1 + a_3.b_0 = 0 + 0 + 1 + 0 = 1$.

Définition 4

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. La fonction :

$$\widetilde{P} : \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \sum_{k=0}^{n} a_k x^k. \end{array}$$

est appelée fonction polynomiale associée au polynôme P.

Proposition 1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. On a :

$$\widetilde{\lambda P + \mu Q} = \lambda \widetilde{P} + \mu \widetilde{Q} \text{ et } \widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}.$$

Preuve. Posons : $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ et posons $a_k = 0$ si $k > n$ et $b_k = 0$ si $k > m$.

- Soit $x \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} \widetilde{\lambda P + \mu Q}(x) &= \sum_{k=0}^{\max(n,m)} (\lambda a_k + \mu b_k) x^k = \lambda \sum_{k=0}^{\max(n,m)} a_k x^k + \mu \sum_{k=0}^{\max(n,m)} b_k x^k \\ &= \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \mu \sum_{k=0}^{m} b_k) x^k = \lambda \widetilde{P}(x) + \mu \widetilde{Q}(x). \end{aligned}$$

  Donc :

$$\widetilde{\lambda P + \mu Q} = \lambda \widetilde{P} + \mu \widetilde{Q}.$$

- Soit $x \in \mathbb{K}$,

$$(\widetilde{P}\widetilde{Q})(x) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right).\left(\sum_{k=0}^{m} b_k) x^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_k b_j x^{k+j} \underset{l=k+j}{=} \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=k}^{k+m} a_k b_{l-k} x^l.$$

  Or :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq k \leq n \\ k \leq l \leq k+m \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \max(0, l-m) \leq k \leq \min(n, l) \\ 0 \leq l \leq n+m \end{array} \right.$$

  Donc :

$$(\widetilde{P}\widetilde{Q})(x) = \sum_{l=0}^{n+m} \sum_{k=\max(0,l-m)}^{\min(n,l)} a_k b_{l-k} x^l = \sum_{l=0}^{n+m} \sum_{k=0}^{l} a_k b_{l-k} x^l,$$

car si $k < l-m$, alors $l-k > m$ donc $b_{l-k}=0$ et si $k > n$ alors $a_k = 0$. Ainsi :

$$(\widetilde{P}\widetilde{Q})(x) = \sum_{l=0}^{n+m} c_l x^l = (\widetilde{PQ})(x).$$

Donc :

$$\widetilde{PQ} = \widetilde{P}\widetilde{Q}.$$

□

Proposition 2

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X], \lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}[X]$
- $P.Q \in \mathbb{K}[X]$

Proposition 3

Soient $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $(P+Q)+R = P+(Q+R)$ (Associativité de l'addition).
- $P+Q = Q+P$ (Commutativité de l'addition).
- $(P.Q).R = P.(Q.R)$ (Associativité de la multiplication).
- $P.Q = Q.P$ (Commutativité la multiplication).
- $P.(Q+R) = (P.Q)+(P.R)$ (distributivité de la multiplication sur l'addition).
- $P+0 = 0+P = P$.
- $P.1 = 1.P = P$.
- $\lambda(P.Q) = (\lambda P).Q = P.(\lambda Q)$.

Preuve. Posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ et $R = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

- $(P+Q)+R = \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)X^k + \sum_{k=0}^{n} c_k X^k = \sum_{k=0}^{n}((a_k+b_k)+c_k)X^k = \sum_{k=0}^{n}(a_k+(b_k+c_k))X^k = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k + \sum_{k=0}^{n}(b_k + c_k X^k) = P+(Q+R)$
- $P+Q = \sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)X^k = \sum_{k=0}^{n}(b_k+a_k)X^k = Q+P$
- On pose $P.Q = \sum_{k=0}^{2n} d_k X^k$, $Q.R = \sum_{k=0}^{2n} e_k X^k$, $(P.Q).R = \sum_{k=0}^{3n} g_k X^k$ et $P.(Q.R) = \sum_{k=0}^{3n} h_k X^k$.

  Soit $k \in [\![0, 3n]\!]$, on a alors : $g_k = \sum_{l=0}^{k} d_l c_{k-l} = \sum_{l=0}^{k}\sum_{m=0}^{l} a_m b_{l-m} c_{k-l}$

  De même, on a : $h_k = \sum_{m=0}^{k} a_m e_{k-m} = \sum_{m=0}^{k}\sum_{p=0}^{k-m} a_m b_p c_{k-m-p} = \sum_{m=0}^{k}\sum_{l=m}^{k} a_m b_{l-m} c_{k-l}$ en posant $l = m+p$

  Or,

  $$\begin{cases} 0 \le m \le k \\ m \le l \le k \end{cases} \iff \begin{cases} 0 \le m \le l \\ 0 \le l \le k \end{cases}$$

  Ainsi : $h_k = \sum_{l=0}^{k}\sum_{m=0}^{l} a_m b_{l-m} c_{k-l} = g_k$

  Donc , on a :

  $$\forall k \in [\![0, 3n]\!],\ h_k = g_k$$

  donc :

  $$(P.Q).R = P.(Q.R)$$

- On pose $QP = \sum_{k=0}^{2n} d'_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

  Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$, on a :

  $$d_k = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} = \sum_{m=0}^{k} a_{k-m} b_m = d'_k \quad \text{en posant } m = k-l$$

  donc

  $$P.Q = Q.P$$

- On pose $Q+R = \sum_{k=0}^{n} s_k X^k$, $P.R = \sum_{k=0}^{n} t_k X^k$, $P.(Q+R) = \sum_{k=0}^{2n} u_k X^k$ et $P.Q + P.R = \sum_{k=0}^{2n} v_k X^k$.

  Soit $k \in [\![0, 2n]\!]$, on a : $u_k = \sum_{l=0}^{k} a_l s_{k-l} = \sum_{l=0}^{k} a_l(b_{k-l}+c_{k-l}) = \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l} + \sum_{l=0}^{k} a_l c_{k-l} = d_k + t_k = v_k$ Donc :

  $$P.(Q+R) = (P.Q)+(P.R)$$

- $P+0=0+P=\sum_{k=0}^{n}(a_k+0)X^k=\sum_{k=0}^{n}a_kX^k=P$
- $P.1=1.P=\sum_{k=0}^{2n}\left(\sum_{l=0}^{k}a_l\delta_{k-l,0}\right)X^k=\sum_{k=0}^{2n}a_kX^k=P.$
- $\lambda(P.Q)=(\lambda 1).(P.Q)=(\lambda 1.P).Q=(\lambda P).Q.$

□

Définition 5

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$, on définit les puissances de P par :

$$P^0=1 \text{ et } \forall n\in\mathbb{N},\ P^{n+1}=P.P^n.$$

Proposition 4 : Formule du binôme de Newton

Soient $P,Q\in\mathbb{K}[X]^2$ et $n\in\mathbb{N}$, on a

$$(P+Q)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^kQ^{n-k}.$$

Proposition 5 : Formule de factorisation

Soient $P,Q\in\mathbb{K}[X]$ et $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$P^n-Q^n=(P-Q)\sum_{k=0}^{n-1}P^kQ^{n-1-k}.$$

Remarque : Les propriétés de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{K}[X]$ sont analogues à celles de $\mathbb{K}$, c'est pourquoi les résultats vus sur les nombres restent vrais sur les polynômes. Les formules du binôme de Newton et de factorisation se prouvent don

➪ **Exemple 1 :** Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ (X^3+X^2+X+1)\sum_{k=0}^{2n}(-1)^kX^k=X^{2n+3}+X^{2n+1}+X^2+1.$$

Définition 6

Soient $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $Q \in \mathbb{K}[X]$. On définit le polynôme composé, noté $P \circ Q$ ou $P(Q)$ par :

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k.$$

Remarque : Il n'y a pas de notion de domaine de définition pour les polynômes, ainsi la composée a toujours un sens.

Proposition 6

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a :

$$\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}.$$

Preuve. Posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Soit $x \in \mathbb{K}$,

$$\widetilde{P} \circ \widetilde{Q}(x) = \widetilde{P}\left(\widetilde{Q}(x)\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \widetilde{Q}(x)^k = \widetilde{\sum_{k=0}^{n} a_k Q^k}(x) = \widetilde{P \circ Q}(x).$$

Donc :

$$\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}.$$

□

Proposition 7

Soit $P, Q, R \in \mathbb{K}[X]$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

- $(\lambda P + \mu Q) \circ R = \lambda P \circ R + \mu Q \circ R$
- $(P.Q) \circ R = (P \circ R).(Q \circ R)$
- $(P \circ Q) \circ R = P \circ (Q \circ R)$
- $X \circ P = P \circ X = P$

Remarque : Le dernier point montre que $P(X) = P$. On peut donc choisir de noter ou non l'indéterminée.

Preuve. Posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ et $R = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.

- $(\lambda P + \mu Q) \circ R = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) R^k = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k R^k + \mu \sum_{k=0}^{n} b_k R^k = \lambda P \circ R + \mu Q \circ R$
- Posons $P.Q = \sum_{k=0}^{2n} d_k X^k$.

  $(P.Q) \circ R = \sum_{k=0}^{2n} d_k R^k$ et :

  $(P \circ R).(Q \circ R) = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k R^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k R^k\right) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_k b_j R^{k+j} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=k}^{k+n} a_k b_{l-k} R^l$ en posant $l = k + j$.

  Donc : $(P \circ R).(Q \circ R) = \sum_{l=0}^{2n} \sum_{k=0}^{l} a_k b_{l-k} R^l = \sum_{l=0}^{2n} d_l R^l = (P.Q) \circ R$.
- $(P \circ Q) \circ R = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k \circ R$.

  Montrons que : $\forall k \in \mathbb{N}$, $Q^k \circ R = (Q \circ R)^k$.
  - Pour $k = 0$, on a :$Q^k \circ R = 1 = (Q \circ R)^k$.
  - Soit $k \in \mathbb{N}$, supposons que : $Q^k \circ R = (Q \circ R)^k$. On a :
    $Q^{k+1} \circ R = (Q^k.Q) \circ R = (Q^k \circ R).Q \circ R = (Q \circ R)^k.Q \circ R = (Q \circ R)^{k+1}$.
  - Donc, par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}$, $Q^k \circ R = (Q \circ R)^k$.

  Ainsi : $(P \circ Q) \circ R = \sum_{k=0}^{n} a_k (Q \circ R)^k = P \circ (Q \circ R)$.
- $X \circ P = P = P \circ X$

□

1.3 Degré d'un polynôme

Définition 7

Soit $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$.
Si P est non nul, on appelle **degré du polynôme** P le plus grand entier naturel n tel que $a_n \neq 0$. On note cet entier $\deg(P)$:

$$\deg P = \max(k \in [\![0, m]\!],\ a_k \neq 0).$$

Si $P = 0$, on pose $\deg(P) = -\infty$ par convention.
Si $\deg(P) = n \in \mathbb{N}$, le coefficient a_n est appelé coefficient dominant de P.
On dit que P est **unitaire** si et seulement si son coefficient dominant est égal à 1.

Remarque : Si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on peut uniquement dire que $\deg(P) \leq n$. Il faut savoir que $a_n \neq 0$ pour dire que $\deg(P) = n$. On a ainsi :

$$\deg(aX^2 + bX + c) = \begin{cases} 2 & \text{si } a \neq 0 \\ 1 & \text{si } a = 0 \text{ et } b \neq 0 \\ 0 & \text{si } a = 0 \text{ et } b = 0 \text{ et } c \neq 0 \\ -\infty & \text{si } a = b = c = 0. \end{cases}$$

Définition 8

Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n :

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X]\ ,\ \deg(P) \leq n\}$$

1.4 Opérations sur les degrés

Proposition 8

Soient P, $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors :

1. $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$;
   De plus, si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, alors $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$;
2. Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\deg(\lambda.P) = \deg(P)$ et si $\lambda = 0$ alors $\deg(\lambda P) = -\infty$;
3. $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$;
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, $\deg(P^n) = n.\deg(P)$;
5. Si $\deg(Q) \geq 1$, $\deg(P \circ Q) = \deg(P).\deg(Q)$.

Preuve.

□

➪ **Exemple 2 :**
On pose : $P = X^3 - X^2 + 1$ et $Q = X - 5$, calculer :

- $\deg(3P + 5Q)$:

- $\deg(P + X^2.Q)$:

- $\deg(P - X^2.Q)$:

- $\deg(P.Q)$:

- $\deg(P.Q^2)$:

- $\deg(P.(3P + 5Q)^2)$:

- $\deg(P(X^3))$:

- $\deg(P(X^3).Q(X))$:

- $\deg(P(X)^3.Q(X))$:

➪ **Exemple 3 :**
Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$P(X+1) - P(X) = X.$$

Remarque : Dans ce type de questions, on cherche d'abord des informations sur le degré. Si les calculs ne sont pas trop compliqués, on pourra alors raisonner par coefficients indéterminés.

Corollaire 1

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, on a :

$$P.Q = 0 \iff P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

Remarque : Par contraposée, le produit de deux polynômes non nuls est non nul.

Preuve.

□

Corollaire 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, soient $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$, soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors :

$$\lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X].$$

Preuve.

□

II Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

2.1 Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$

Définition 9

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$. On dit que B **divise** A dans $\mathbb{K}[X]$ ou que A est **un multiple de** B dans $\mathbb{K}[X]$ et on note $B|A$ s'il existe $C \in \mathbb{K}[X]$ tel que : $A = BC$.

Proposition 9

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $A \neq 0$. Si $B|A$, alors :

$$\deg B \leq \deg A.$$

2.2 Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Théorème 1 : division euclidienne

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $B \neq 0$. Alors, il existe un unique couple $(Q, R) \in (\mathbb{K}[X])^2$ tel que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ deg(R) < deg(B) \end{cases}$$

On appelle Q le **quotient** et R le **reste** dans la **division euclidienne de** A **par** B.

Remarque : En pratique, on utilise le même algorithme pour la division euclidienne de polynômes que pour la division euclidienne de nombres.

$$\begin{array}{r|l}
X^3 - 3X^2 + 3X + 1 & X - 2 \\ \hline
-(X^3 - 2X^2) \qquad\qquad & X^2 - X + 1 \\
-X^2 + 3X + 1 & \\
-(-X^2 + 2X) \quad & \\
X + 1 & \\
-(X - 2) & \\
3 &
\end{array}$$

Corollaire 3

Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. On a : B divise A si et seulement si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

➪ **Exemple 4 :** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, on pose $P = X^4 + X^3 + 3X^2 + aX + b$ et $Q = X^2 + 1$.

1. Effectuer la division euclidienne de P par Q.
2. Déterminer a et b tels que $Q|P$.

III Evaluation polynomiale et racines

3.1 Evaluation polynomiale

Définition 10

Soit $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, soit $a \in \mathbb{K}$. On pose :

$$P(a) = \sum_{k=0}^{m} a_k a^k.$$

Remarque :

- Lorsqu'on évalue un polynôme $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ en $a \in \mathbb{K}$, on a : $P(a)=\sum_{k=0}^{n} a_k a^k$. C'est en fait la fonction polynomiale qui est évaluée en a. En termes de polynômes, le polynôme P est composé avec le polynôme constant égal à a.
- L'écriture $P(a)=\sum_{k=0}^{n} a_k a^k$ nécessite de faire n produits pour le calcul des puissances de a et $n+1$ produit avec les coefficients, soit $2n-1$ produits.
  Afin de minimiser le nombre de produits dans l'évaluation polynomiale on peut utiliser la méthode de Horner. Cette méthode consiste à écrire :
  $$P(a)=((((a_n.a+a_{n-1})a+a_{n-2})a+\ldots)a+a_1)a)+a_0.$$
  Il y a donc n produits à effectuer. A chaque étape, on multiplie le terme par a et on ajoute le coefficient.
  Par exemple, si $P=3X^4-2X^3+7X^2+X-1$ et $a=2$, on part du coefficient dominant qui est 3 et on a :
  $$3 \xrightarrow[\cdots\times 2-2]{} 4 \xrightarrow[\cdots\times 2+7]{} 15 \xrightarrow[\cdots\times 2+1]{} 31 \xrightarrow[\cdots\times 2-1]{} 61$$
  Donc $P(2)=61$.

3.2 Racines d'un polynôme

Définition 11

On dit que $a\in\mathbb{K}$ est une **racine** dans $\mathbb{K}$ d'un polynôme $P\in\mathbb{K}[X]$ ssi $P(a)=0$.

Proposition 10

Soit $a\in\mathbb{K}$ et $P\in\mathbb{K}[X]$.

- Le reste dans la division euclidienne de P par $(X-a)$ est $P(a)$.
- a est racine de P si et seulement si $X-a$ divise P.

Proposition 11

Soit $P\in\mathbb{K}[X]$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $a_1,\cdots a_n\in\mathbb{K}$ deux à deux distincts.
$a_1,a_2,\cdots,a_n$ sont racines de P si et seulement si $\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)|P$.

➪ **Exemple 5 :** Montrer que :
$$X^2-2X|(X-1)^4+(X-1)^2-2.$$

➪ **Exemple 6 :** Déterminer tous les P de degré 3 tels que $P(0)=P(1)=P(2)=0$.

3.3 Nombre de racines

Proposition 12

Un polynôme non nul de degré $n\in\mathbb{N}$ a au plus n racines deux à deux distinctes.

Corollaire 4

- Un polynôme de $\mathbb{K}_n[X]$ ayant au moins $n+1$ racines deux à deux distinctes est le polynôme nul.
- Le seul polynôme qui possède une infinité de racines (distinctes) est le polynôme nul.

Remarque : Si on montre qu'un polynôme est nul sur un ensemble infini, alors il est nul.

➪ **Exemple 7 :**

Soit $P\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\sum_{k=0}^{n} P^2(k)=0$. Montrer que $P=0$.

Corollaire 5

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On a :

$$P = 0 \Longleftrightarrow \widetilde{P} = 0,$$

autrement dit :

$$(\forall k \in [\![0, n]\!],\ a_k = 0) \Longleftrightarrow (\forall x \in \mathbb{K},\ P(x) = 0).$$

Corollaire 6

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, soit D un ensemble infini :

$$P = Q \Leftrightarrow \forall x \in D,\ \widetilde{P}(x) = \widetilde{Q}(x).$$

Remarque : Ce résultat permet de faire des identifications de fonctions polynomiales.

3.4 Multiplicité d'une racine

Définition 12

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$ une racine de P. On appelle ordre de multiplicité de la racine a, le plus grand entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $(X-a)^m$ divise P, autrement dit, l'entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que :

$$(X-a)^m \mid P \quad \text{et} \quad (X-a)^{m+1} \nmid P$$

On dit alors que a est racine d'ordre m ou de multiplicité m de P.

Remarque : On parle de racine simple pour $m = 1$, double pour $m = 2$ et triple pour $m = 3$.

Proposition 13

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
a est racine de multiplicité m de P ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-a)^m Q$ et a n'est pas racine de Q.

Corollaire 7

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $P \neq 0$, soit $n = \deg(P)$.
P admet au plus n racines comptées avec leur multiplicité.

Remarque : Compter les racines avec leur multiplicité signifie qu'on ne compte pas chaque racine de la même façon mais qu'on leur attribue un poids. Par exemple, pour $P = (X-1)^3(X-2)^2$, P admet 2 racines distinctes : 1 de multiplicité 3 et 2 de multiplicité de 2 donc 5 racines comptées avec leur multiplicité.

3.5 Polynômes scindés

Définition 13

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On dit que P est scindé dans $\mathbb{K}$ ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tels que :

$$P = \lambda \prod_{j=1}^{n} (X - a_j)$$

Remarque : La notion de polynôme scindé dépend de $\mathbb{K}$:

- $P = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.
- $P = X^3 + X = X(X^2+1) = X(X+i)(X-i)$ est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ et pas dans $\mathbb{R}[X]$.

Proposition 14

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$. P est scindé dans $\mathbb{K}$ ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$, $a_1, ..., a_k \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, $m_1, \ldots, m_k \in \mathbb{N}^*$ tels que :

$$P = \lambda \prod_{j=1}^{n} (X - a_j)^{m_j}.$$

On a alors :

- λ est le coefficient dominant de P,
- les $a_j \in \mathbb{K}$ sont les racines de P de multiplicité m_j,
- $\sum_{j=1}^{k} \alpha_j = \deg(P)$.

Remarque : Ce résultat est la définition dans laquelle on a regroupé les facteurs identiques.

3.6 Somme et produit des racines d'un polynôme

Proposition 15 : Relations coefficients/racines

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$, scindé dans $\mathbb{K}[X]$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $x_1, ..., x_n \in \mathbb{K}$ tels que : $P = \lambda \prod_{j=1}^{n} (X - x_j)$. On a :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \qquad \text{et} \qquad \prod_{i=1}^{n} x_i = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Remarque : Ce résultat donne la somme et le produit des racines d'un polynômes scindés. On retrouve le cas particulier les polynômes de degré 2 : $P = aX^2 + bX + c$ où la somme des racines vaut $-\frac{b}{a}$ et le produit vaut $\frac{c}{a}$.

IV Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

4.1 Généralités

Définition 14

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. On appelle polynôme dérivé de P et on note P' le polynôme défini par :

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{l=0}^{n-1} (l+1) a_{l+1} X^l.$$

Remarque : Il n'y a pas d'étude de dérivabilité à faire et surtout pas de taux d'accroissement à écrire.

Proposition 16

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On a :

$$\widetilde{(P')} = (\widetilde{P})'.$$

Autrement dit la fonction polynomiale associée à la dérivée est la dérivée de la fonction polynomiale associée au polynôme.

Définition 15

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence les polynômes dérivés successifs de P en posant

$$P^{(0)} = P \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ P^{(n+1)} = (P^{(n)})'$$

Proposition 17

Soient $n, k \in \mathbb{N}$,

$$(X^n)^{(k)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 18

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, soit $k \in \mathbb{N}$.

$$\deg(P') = \begin{cases} \deg(P) - 1 & \text{si } \deg P \geq 1 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad \deg(P^{(k)}) = \begin{cases} \deg(P) - k & \text{si } \deg P \geq k \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Corollaire 8

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\deg P \leq n \Longleftrightarrow P^{(n+1)} = 0.$$

➪ **Exemple 8 :**

1. On pose : $P = X^4 + 3X^3 + 2X + 5$ et $Q = X^2 - 8X + 1$.
   Calculer les degrés de $P.Q'$, $(P \circ Q)'$, $P' - XQ$, $P' - 4XQ$, $P'' \circ Q$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $P = \sum_{k=0}^{n} X^k$ et $Q = X^2 - X + 1$.
   Calculer le degré et le coefficient dominant de $P' \circ Q$.

4.2 Opérations sur les dérivées

Proposition 19

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a :

1. $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $(\lambda P + \mu Q)' = \lambda P' + \mu Q'$.
2. $(P.Q)' = P'.Q + P.Q'$.

Proposition 20 : Formule de Leibniz

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

Proposition 21

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. On a :

$$(P \circ Q)' = Q' \times (P' \circ Q)$$

4.3 Formule de Taylor polynomiale

Proposition 22 : Formule de Taylor polynomiale

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $\deg(P) \leq N$. Soit $a \in \mathbb{K}$. Alors :

$$P(X + a) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} X^k$$

et :

$$P(X) = \sum_{k=0}^{N} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (X - a)^k.$$

Remarque : Cette formule permet de privilégier le point a.

➪ **Exemple 9 :** Déterminer tous les polynômes P tels que :

$$P(2) = 6,\ P'(2) = 1,\ P''(2) = 4,$$

$$\forall n \geq 3,\ P^{(n)}(2) = 0.$$

4.4 Dérivées successives et multiplicité

Proposition 23

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}^*$.
a est racine de multiplicité m de P ssi, pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$, a est racine de $P^{(k)}$ et a n'est pas racine de $P^{(m)}$.

Corollaire 9

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, soit $a \in \mathbb{K}$ une racine de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$ de P , soit $k \in [\![0, m-1]\!]$.
Alors a est racine de multiplicité $m-k$ de $P^{(k)}$.

Corollaire 10

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$.
Alors $\overline{a}$ est racine de P de multiplicité m.

➪ **Exemple 10 :**
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, soit $a \in \mathbb{R}$. On pose :

$$Q = \frac{1}{2}(X-a)(P' + P'(a)) - P + P(a).$$

Montrer que a est une racine au moins triple de Q.

➪ **Exemple 11 :**

1. Montrer que : $(X^2-4)^2 | X^6 - 9X^4 + 24X^2 - 16$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que : $(X-1)^2 | nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.

V Polynômes irréductibles

5.1 Théorème de D'Alembert-Gauss

Théorème 2 : Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Corollaire 11

- Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.
- Tout polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 0$ admet exactement n racines comptées avec leur multiplicité.

5.2 Polynômes irréductibles

Définition 16

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. P et Q sont dits associés ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $P = \lambda Q$.

Remarque : Les polynômes associés sont les polynômes tels que $P|Q$ et $Q|P$.

Définition 17

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$ si P est non constant et si les seuls diviseurs de P dans $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes constants non nuls (i.e les polynômes associés à 1) et les polynômes associés à P.
Ainsi, un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est irréductible ssi :

- P est non constant
- $\forall A \in \mathbb{K}[X],\ A|P \implies \exists \lambda \in \mathbb{K}^*,\ A = \lambda$ ou $A = \lambda P$

5.3 Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

Proposition 24

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynôme de degré 1.

Théorème 3

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{C}[X]$, alors P s'écrit de façon unique (à l'ordre près des facteurs) en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$:

$$P = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)^{m_k}$$

où $n \in \mathbb{N}$, λ est le coefficient dominant de P, $a_1, \cdots, a_n$ sont les racines deux à deux distinctes de P de multiplicité $m_1, \cdots, m_n \in \mathbb{N}^*$.

➪ **Exemple 12 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Proposition 25

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, on a : $P|Q$ ssi pour toute racine $a \in \mathbb{C}$ de P de multiplicité m, a est racine de Q de multiplicité m' avec $m' \geq m$.

5.4 Polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition 26

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont

- les polynômes de degré 1 ;
- les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Théorème 4

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$, alors P s'écrit de manière unique (à l'ordre près)en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$:

$$P = \lambda \prod_{i=1}^{p} (X - a_i)^{m_i} \prod_{j=1}^{q} (X^2 + b_j X + c_j)^{n_j}$$

où $p, q \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ est le coefficient dominant de P, $a_1, ..., a_p$ sont les racines réelles deux à deux distinctes de P de multiplicités respectives $m_1, ..., m_p \in \mathbb{N}^*$, les couples de réels $(b_1, c_1), ..., (b_q, c_q)$ sont deux à deux distincts et tels que pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, $b_k^2 - 4c_k < 0$ et $n_1, ..., n_q \in \mathbb{N}^*$.

➪ **Exemple 13 :**

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

- $P_1 = X^3 - 4X^2 + X + 6$,
- $P_2 = X^3 + X^2 - 2$,
- $P_3 = (X^2 + 1)^2 - (X + 1)^2$,
- $P_4 = (X^2 + 2)^2 + X^2$,
- $P_5 = X^8 + X^4 + 1$.

VI Introduction à la décomposition en éléments simples

Définition 18

On appelle fraction rationnelle un quotient de polynômes dont le dénominateur est non nul :

$$\frac{P}{Q},\ P, Q \in \mathbb{K}[X],\ Q \neq 0.$$

Les zéros de la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ sont les racines de P.
Les pôles de la fraction rationnelle $\frac{P}{Q}$ sont les racines de Q.

Remarque : On ne donne pas la définition ni les propriétés formelles des fractions rationnelles. L'objectif de cette partie est calculatoire. On remarquera quand même que, comme pour les polynômes, il n'y a pas de notion de domaine de définition.

Théorème 5 : décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle à pôles simples

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, avec $Q \neq 0$ tel que Q soit scindé à racines simples : il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ **deux à deux distincts** tels que $Q = \lambda \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)$. Soit A le quotient de la division euclidienne de P par Q. Alors, il existe un unique $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$\frac{P}{Q} = A + \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_k}{X - a_k}.$$

Remarque :

- Si $\deg P < \deg Q$, alors $A = 0$.
- Ce théorème ne concerne que les fractions rationnelles à pôles simples, la décomposition en élément simple existe dans les autres cas mais sa forme doit être donnée.
- La décomposition en éléments simples est utile pour calculer des primitives et des dérivées k-ièmes.

➪ **Exemple 14 :** Déterminer la décomposition en éléments simples de :

1. $F_1 = \frac{X^2+2X+5}{X^2-3X+2}$,
2. $F_2 = \frac{4X^3}{X^4-1}$.

➪ **Exemple 15 :**

1. Déterminer la décomposition en éléments simples de :
$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)}.$$
2. On pose :
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} \setminus \{-2, -1, 0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}. \end{array}$$
   (a) Déterminer une primitive de f.
   (b) Déterminer les dérivées n-ièmes de f pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}.$$

➪ **Exemple 16 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}[X]$ de :

1. $F_n = \dfrac{1}{X^n - 1}$,
2. $G_n = \dfrac{X^{n-1}}{X^n - 1}$.