Chapitre 15 : Analyse asymptotique

Dans tout le chapitre $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et a un point de I ou une extrémité de I (éventuellement $\pm\infty$).

I Relations de comparaison : cas des fonctions

1.1 Définitions et propriétés

Définition 1

Soient $f, g : I \to \mathbb{K}$ telles que g ne s'annule pas sur un voisinage de a, sauf éventuellement en a avec dans ce cas $f(a) = 0$. On dit que :

- f est dominée par g au voisinage de a ssi $\dfrac{f}{g}$ est bornée au voisinage de a.
  On note $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} O(g)$.
- f est négligeable devant g au voisinage de a ssi $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.
  On note $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ ou $f \underset{a}{=} o(g)$.
- f est équivalente à g au voisinage de a ssi $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.
  On note $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$.

Proposition 1

- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, on a : $\ln^{\alpha}(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^{\beta})$.
- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, on a : $x^{\alpha} \underset{x\to+\infty}{=} o(e^{\beta x})$.
- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta < 0$, on a : $|\ln(x)|^{\alpha} \underset{x\to 0}{=} o(x^{\beta})$.
- Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$, on a : $e^{\beta x} \underset{x\to-\infty}{=} o(|x|^{\alpha})$.

Preuve. Il s'agit des croissances comparées. □

Dans toute la suite du paragraphe, on considère $f, g, h, u : I \to \mathbb{K}$. Chaque fois que l'on écrira une relation de la forme $f \underset{a}{=} o(g)$ ou $f \underset{a}{=} O(g)$ ou $f \underset{a}{\sim} g$, on supposera que g ne s'annule pas sur au voisinage de a sauf éventuellement en a avec dans ce cas $f(a) = 0$.

Proposition 2

- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $f \underset{a}{=} O(g)$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} O(f)$.
- $f \underset{a}{\sim} g$ si et seulement si $f \underset{a}{=} g + o(g)$.

Preuve.

- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ donc $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ admet une limite finie en a. Ainsi $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a. Donc : $f \underset{a}{=} O(g)$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ donc $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ admet une limite finie en a. Ainsi $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a. Donc : $f \underset{a}{=} O(g)$.
- $f \underset{a}{\sim} g \iff \displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \iff \lim_{x\to a} \frac{f(x)-g(x)}{g(x)} = 0 \iff f - g \underset{a}{=} o(g) \iff f \underset{a}{=} g + o(g)$

□

Remarque : Le troisième point permet de transformer un équivalent en une relation de négligeabilité, cette dernière ayant davantage de propriétés.

Proposition 3

- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$ alors $f \underset{a}{=} O(h)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $f \underset{a}{=} o(h)$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $f \underset{a}{\sim} h$.

Remarque : Les relations de comparaison sont transitives.

Preuve.

- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $g \underset{a}{=} O(h)$ alors $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ et $x \mapsto \frac{g(x)}{h(x)}$ sont bornées au voisinage de a donc, par produit, $x \mapsto \frac{f(x)}{h(x)}$ est bornée au voisinage de a, ainsi : $f \underset{a}{=} O(h)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $g \underset{a}{=} o(h)$ alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{h(x)} = 0$, donc, par produit, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{h(x)} = 0$, ainsi : $f \underset{a}{=} o(h)$.
- Si $f \underset{a}{\sim} o(g)$ et $g \underset{a}{\sim} h$ alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{g(x)}{h(x)} = 1$, donc, par produit, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{h(x)} = 1$, ainsi : $f \underset{a}{\sim} h$.

□

Proposition 4

- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $h \underset{a}{=} O(g)$ alors $f + h \underset{a}{=} O(g)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(g)$ alors $f + h \underset{a}{=} o(g)$.

Preuve.

- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $h \underset{a}{=} O(g)$ alors $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ et $x \mapsto \frac{h(x)}{g(x)}$ sont bornées au voisinage de a, donc : $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{f(x)+h(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a. Ainsi : $f + h \underset{a}{=} O(g)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(g)$ alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{h(x)}{g(x)} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)+h(x)}{g(x)} = 0$. Ainsi : $f + h \underset{a}{=} o(g)$.

□

Remarque : Pour sommer les relations de domination ou négligeabilité, il faut comparer à la même fonction.
Par exemple, on a : $x \underset{x\to 0}{=} o(x-1)$ et $x \underset{x\to 0}{=} o(1)$ mais $2x \underset{x\to 0}{\neq} o(x)$.

⚠⚠⚠ On ne somme pas les équivalents. ⚠⚠⚠

Remarque : Par exemple $x + x^4 \underset{x\to 0}{\sim} x + x^3$ et $-x + x^5 \underset{x\to 0}{\sim} -x + x^6$ mais $x^4 + x^5 \underset{x\to 0}{\not\sim} x^3 + x^6$.

Proposition 5

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ alors $\lambda f = O(g)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $\lambda f = o(g)$.
- Si $\lambda \neq 0$ et $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\lambda f \underset{a}{\sim} \lambda g$.

Remarque : Les constantes multiplicatives sont "absorbées" par les o et O mais doivent être conservées dans les équivalents.

Preuve.

- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ alors $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a donc $x \mapsto \frac{\lambda f(x)}{g(x)}$ est bornée au voisinage de a, ainsi : $\lambda f = O(g)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\lambda f(x)}{g(x)} = 0$, ainsi : $\lambda f = o(g)$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\lambda f(x)}{\lambda g(x)} = 1$, ainsi : $\lambda f \underset{a}{\sim} \lambda g$.

□

Proposition 6

- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $h \underset{a}{=} O(u)$ alors $fh \underset{a}{=} O(gu)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(u)$ alors $fh \underset{a}{=} o(gu)$.
- Si $f \underset{a}{\sim} g$ et $h \underset{a}{\sim} u$ alors $fh \underset{a}{\sim} gu$.

Remarque : Les produits ne posent pas de problèmes dans les relations de comparaisons.

Preuve.
- Si $f \underset{a}{=} O(g)$ et $h \underset{a}{=} O(u)$ alors $x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$ et $x \mapsto \frac{h(x)}{u(x)}$ sont bornées au voisinage de a donc $x \mapsto \frac{\lambda f(x)h(x)}{g(x)u(x)}$ est bornée au voisinage de a, ainsi : $fh \underset{a}{=} O(gu)$.
- Si $f \underset{a}{=} o(g)$ et $h \underset{a}{=} o(u)$ alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{h(x)}{u(x)} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)h(x)}{g(x)u(x)} = 0$, ainsi : $fh \underset{a}{=} o(gu)$.
- Si $f \underset{a}{\sim} o(g)$ et $h \underset{a}{\sim} u$ alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{h(x)}{u(x)} = 1$, donc $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)h(x)}{g(x)u(x)} = 1$, ainsi : $fh \underset{a}{\sim} gu$.

□

Proposition 7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, si $f \underset{a}{\sim} g$ et si, de plus, f^α et g^α sont bien définies alors, $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$.

Remarque : Ce résultat est vrai pour les puissances constantes mais pas pour les puissances variables.

Preuve. Si $f \underset{a}{\sim} g$ alors $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to a} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)^\alpha = 1$, ainsi $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)^\alpha}{g(x)^\alpha} = 1$, d'où : $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$. □

1.2 Composition à droite

Proposition 8

Soit φ une fonction à valeurs dans I telle que $\lim\limits_{t\to b} \varphi(t) = a$ avec $b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ alors, $f \circ \varphi(t) \underset{t\to b}{=} o(g \circ \varphi(t))$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$ alors, $f \circ \varphi(t) \underset{t\to b}{\sim} g \circ \varphi(t)$.

Preuve.
- On a $\lim\limits_{t\to b} \varphi(t) = a$ et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$. Donc par composition $\lim\limits_{t\to b} \dfrac{f(\varphi(t))}{g(\varphi(t))} = 0$. Ainsi, $f(\varphi(t)) \underset{t\to b}{=} o(g(\varphi(t)))$.
- On a $\lim\limits_{t\to b} \varphi(t) = a$ et $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$. Donc par composition $\lim\limits_{t\to b} \dfrac{f(\varphi(t))}{g(\varphi(t))} = 1$. Ainsi, $f(\varphi(t)) \underset{t\to b}{\sim} g(\varphi(t))$.

□

Remarque : La composition à droite, signifie que, dans un équivalent, on peut remplacer x par une fonction mais qu'on ne peut pas, sauf cas particulier (puissances par exemple), appliquer une fonction à un équivalent.

1.3 Equivalents usuels

Proposition 9

- $\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1$, $\operatorname{ch} x \underset{x\to 0}{\sim} 1$,
- $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$,
- $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$, $\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{\sim} x$,
- $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$,
- $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$,
- $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$,
- $\operatorname{Arctan} x \underset{x\to 0}{\sim} x$,
- Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$.

Remarque : Les équivalents usuels sont au voisinage de 0 mais ils peuvent servir à calculer un équivalent en un point a quelconque en considérant $f(a+h)$ avec $h \to 0$.

Preuve.
- $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ donc $\cos x \underset{x\to 0}{\sim} 1$,
  $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ch} x = 1$ donc $\operatorname{ch} x \underset{x\to 0}{\sim} 1$,
- Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a : $\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1-(1-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right))}{x^2} = \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2$

  donc : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$ donc $1 - \cos(x) \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{x^2}{2}$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \cos(0) = 1$ (taux d'accroissement) donc $\sin x \underset{x\to 0}{\sim} x$,
  $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = \operatorname{ch}(0) = 1$ (taux d'accroissement) donc $\operatorname{sh} x \underset{x\to 0}{\sim} x$,

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1+\tan^2(0) = 1$ (taux d'accroissement) donc $\tan x \underset{x\to 0}{\sim} x$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = e^0 = 1$ (taux d'accroissement) donc $e^x - 1 \underset{x\to 0}{\sim} x$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{1+0} = 1$ (taux d'accroissement) donc $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\mathrm{Arctan}\, x}{x} = \frac{1}{1+0^2} = 1$ (taux d'accroissement) donc $\mathrm{Arctan}\, x \underset{x\to 0}{\sim} x$,
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha-1}{x} = \alpha(1+0)^{\alpha-1} = \alpha$ (taux d'accroissement) donc $(1+x)^\alpha - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \alpha x$.

□

Remarque :
- Le résultat $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} 1+\alpha x$ est vrai mais n'a aucun intérêt car $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} 1+f(x)$ où f est une fonction quelconque telle que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.
- De façon plus général, quand on cherche un équivalent, on donnera une expression qui ne fait plus apparaître de somme mais uniquement un seul terme.

Proposition 10

Si $P(x) = a_p x^p + a_{p+1}x^{p+1} + \ldots + a_q x^q$ avec $p \le q$ et $a_p \neq 0$ et $a_q \neq 0$, alors :

$$P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p \quad \text{et} \quad P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_q x^q$$

Remarque : Pour une fonction polynomiale, le terme de plus haut degré est un équivalent en $\pm\infty$ et le terme de plus bas degré est un équivalent en 0.

Preuve.

$$\frac{P(x)}{a_p x^p} = 1 + \sum_{k=p+1}^{q} \frac{a_k}{a_p} x^{k-p} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 + \sum_{k=p+1}^{q} \frac{a_k}{a_p} 0^{k-p} = 1 \qquad (k-p>0).$$

Ainsi, $P(x) \underset{x\to 0}{\sim} a_p x^p$.

$$\frac{P(x)}{a_q x^q} = \sum_{k=p}^{q-1} \frac{a_k}{a_q} x^{k-q} + 1 = \sum_{k=p}^{q-1} \frac{a_k}{a_q} \left(\frac{1}{x}\right)^{q-k} + 1 \underset{x\to\pm\infty}{\longrightarrow} \sum_{k=p}^{q-1} \frac{a_k}{a_q} 0^{q-k} + 1 = 1 \qquad (q-k>0).$$

Ainsi, $P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_q x^q$.

□

➪ **Exemple 1 :** Déterminer un équivalent simple de :

1. $f(x) = \ln(\sqrt{1+\sin x})$ en $x=0$,

2. $f(x) = \sqrt[4]{1+\tan x} - 1$ en $x=0$,

3. $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ en $x=0$.

4. $f(x)=e^{\cos x}-1$ en $x=\frac{\pi}{2}$,

5. $f(x)=\sqrt{x-1}-1$ en $x=2$,

6. $f(x)=\ln(x+x^2)$ en $x=0$.

1.4 Equivalent et encadrement

Proposition 11

Si $f\leq g\leq h$ et $f(x)\underset{x\to a}{\sim}h(x)$, alors :
$$g(x)\underset{x\to a}{\sim}f(x).$$

Preuve. Au voisinage de a, on a :

- si $f(x)>0$ alors $1\leq\frac{g(x)}{f(x)}\leq\frac{h(x)}{f(x)}$ donc :
$$\left|\frac{g(x)}{f(x)}-1\right|=\frac{g(x)}{f(x)}-1\leq\frac{h(x)}{f(x)}-1=\left|\frac{h(x)}{f(x)}-1\right|.$$
- si $f(x)<0$ alors $1\geq\frac{g(x)}{f(x)}\geq\frac{h(x)}{f(x)}$ donc :
$$\left|\frac{g(x)}{f(x)}-1\right|=1-\frac{g(x)}{f(x)}\leq1-\frac{h(x)}{f(x)}=\left|\frac{h(x)}{f(x)}-1\right|.$$

Dans tous les cas :

$$\left|\frac{g(x)}{f(x)}-1\right| \leq \left|\frac{h(x)}{f(x)}-1\right|.$$

Or $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{h(x)}=1$. Donc, par théorème d'encadrement : $\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=1$. Ainsi : $g(x)\underset{x\to a}{\sim} f(x)$. □

1.5 Calcul de limites

Proposition 12

Soit $l\in\mathbb{R}^*$. Si $\lim_{x\to a} f(x)=l$ alors $f(x)\underset{x\to a}{\sim} l$.

Preuve. On a $\lim_{x\to a} f(x)=l$ donc $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{l}=1$, d'où $f(x)\underset{x\to a}{\sim} l$. □

Proposition 13

Si $f(x)\underset{x\to a}{\sim} g(x)$ et $\lim_{x\to a} g(x)=l\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ alors $\lim_{x\to a} f(x)=l$.

Preuve. On a, au voisinage de a, $f(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.g(x)$. Or $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ et $\lim_{x\to a} g(x)=l$ donc : $\lim_{x\to a} f(x)=l$. □

➪ **Exemple 2 :** Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0}\frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$,

2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{\cos(\sqrt{1+x}-1)}-e}{x^2}$,

3. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\ln((\sin x)^2)}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$

4. $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{\ln x} \right)^{x \ln x}$.

1.6 Equivalent et signe

Proposition 14

Si $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ et si g est strictement négative (resp. strictement positive) au voisinage de a alors f est strictement négative (resp. strictement positive) au voisinage de a.

Preuve. Supposons g strictement négative au voisinage de a. Comme $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 > 0$, alors, au voisinage de a, $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ et comme $g(x) < 0$, on a donc $f(x) < 0$. □

II Développements limités

Dans toute cette partie, n désignera un élément de $\mathbb{N}$.

2.1 Définition

Définition 2

On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ admet un développement limité à l'ordre n en a ssi il existe $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que :

- si $a \in \mathbb{R}$,
$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$$
- si $a = \pm\infty$,
$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{x^k} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$
- On note $DL_n(a)$ l'ensemble des fonctions admettant un développement limité à l'ordre n en a.

Remarque : Si $x \to \pm\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$ donc un développement limité en $\pm\infty$ se ramène à un développement limité en 0.

Dans toute la suite, on suppose que a est fini.

Formule 1

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-x} &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

Formule 2

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x} &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)\end{aligned}$$

Remarque : Les développements limités usuels sont donnés au voisinage de 0. Pour calculer le développement limité de $f(x)$ en $x = a$, on peut se ramener au développement limité de $h \mapsto f(a+h)$ en $h = 0$.

2.2 Unicité et troncature

Proposition 15 : Unicité d'un DL

Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a, celui-ci est unique.
De plus, si $f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o\left((x-a)^n\right)$ alors, la fonction polynomiale $P_n : x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k$ est appelée partie régulière du développement limité de f à l'ordre n en a.

Proposition 16 : Troncature d'un DL

Soit $f \in DL_n(a)$:
$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$$
alors pour tout $p \in [\![0, n]\!]$, $f \in DL_p(a)$ et :
$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{p} a_k(x-a)^k + o((x-a)^p).$$

Remarque : La troncature sera utile afin de se ramener à des développements limités de même ordre.

2.3 Parité

Proposition 17

Soit $f \in DL_n(0)$:

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o\left(x^n\right).$$

- si f est paire, alors : $\forall k \leq \frac{n-1}{2}$, $a_{2k+1} = 0$,
- si f est impaire, alors : $\forall k \leq \frac{n}{2}$, $a_{2k} = 0$.

2.4 Dérivabilité

Proposition 18

f est dérivable en a si et seulement si f admet un développement limité à l'ordre 1 en a.
Ce développement limité est alors : $f(x) \underset{x \to a}{=} f(a) + (x-a)f'(a) + o((x-a))$.

2.5 Formule de Taylor-Young

Proposition 19 : Formule de Taylor-Young

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Alors $f \in DL_n(a)$ et :

$$f(x) \underset{x \to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Remarque : Cette formule sera prouvé dans la suite du chapitre. Elle permet d'obtenir les développements limités usuels.

Formule 3

$$\begin{aligned} e^x &\underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &\underset{x \to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \end{aligned}$$

Formule 4

$$\begin{aligned} \cos x &\underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \\ &\underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

Formule 5

$$\begin{aligned} \sin x &\underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ &\underset{x \to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

Formule 6

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &\underset{x \to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)\frac{x^k}{k!} + o(x^n) \\ &\underset{x \to 0}{=} 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\frac{x^2}{2} + \dots + \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)\frac{x^n}{n!} + o(x^n) \end{aligned}$$

➪ **Exemple 3 :** Soit $f : x \mapsto x^5 e^x$. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(n)}(0)$.

2.6 Opérations sur les développements limités

Proposition 20

Soient $f, g \in DL_n(a)$:

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors $\lambda f + \mu g \in DL_n(a)$ et on a :

$$(\lambda f + \mu g)(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k)(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Formule 7

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} x &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \\ &\underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$

Formule 8

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}) \\ &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2}) \end{aligned}$$

➪ **Exemple 4 :** Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \sin x$ à l'ordre 3 au voisinage de $\frac{\pi}{4}$,
2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 2 au voisinage de 2.

Proposition 21

Soient $f, g \in DL_n(a)$:

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

Alors :

$$fg \in DL_n(a).$$

Posons $c_0, \dots, c_{2n} \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k X^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{2n} c_k X^k\right).$$

On a :

$$(fg)(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big).$$

Remarque : Le produit des parties régulières est de degré $2n$ mais il est tronqué à l'ordre n.

➪ **Exemple 5 :** Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \cos(x).\operatorname{ch}(x)$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto \sqrt{1+x}\ln(1+x)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Méthode 1 : Réduction de l'ordre

Afin de réduire l'ordre des développements limités de f et g, on factorise par le terme dominant.
Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} x^p(a_0 + \dots + o(x^r))$ DL de f à l'ordre $p+r$

$g(x) \underset{x\to 0}{=} x^q(b_0 + \dots + o(x^r))$ DL de g à l'ordre $q+r$

alors, $f(x)g(x) \underset{0}{=} x^{p+q}(a_0 + \dots + o(x^r))(b_0 + \dots + o(x^r))$.
En effectuant, le produit, on obtient ainsi un DL de fg à l'ordre $p+q+r$ (ce qui est mieux que $\min(p+r, q+r)$).

➪ **Exemple 6 :** Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto (\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto ((\operatorname{ch} x - \cos x)(\operatorname{sh} x - \sin x))^2$ à l'ordre 11 au voisinage de 0.

Méthode 2 : DL de la composée

- Cas de la composée avec : $x \mapsto x^q$. Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$ (DL de f à l'ordre n),

  alors, par composition à droite :
  $$f(x^q) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k x^{qk} + o(x^{qn}),$$
  on obtient donc un DL de $x \mapsto f(x^q)$ à l'ordre qn.
- Si f et g admettent un DL à l'ordre n en 0 et si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, alors, pour obtenir une développement limité de $f \circ g$ en 0 à l'ordre n, il suffit de composer les parties régulières et de tronquer à l'ordre n le résultat obtenu.

➪ **Exemple 7 :** Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(x^3)$ à l'ordre 8 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto (\cos x)^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,
3. $f : x \mapsto \sqrt{1 + \sqrt{1 + 4\sin x}}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0,
4. $f : x \mapsto \cos(\sin x)$ à l'ordre 6 au voisinage de 0.

Méthode 3 : DL du quotient

- Si $\lim_{x\to 0} g(x) \neq 0$, alors $g(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + \dots + a_n x^n + o(x^n)$ avec $a_0 \neq 0$. On a :
  $$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &\underset{x\to a}{=} f(x) \times \frac{1}{a_0 + \dots + a_n x^n + o(x^n)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{f(x)}{a_0} \times \frac{1}{1 + \dots + \frac{a_n}{a_0} x^n + o(x^n)} \end{aligned}$$
  On utilise alors le DL de $u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$ à l'ordre n qui, en composant donne le DL de $x \mapsto \dfrac{1}{1 + \dots + \frac{a_n}{a_0} x^n + o(x^n)}$ à l'ordre n. Puis avec le produit par le DL d'ordre n de f, on obtient le DL de $\frac{f}{g}$ à l'ordre n. Il y a donc conservation de l'ordre.
- Si $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$, on utilise la factorisation par le terme dominant :
  $f(x) \underset{x\to 0}{=} x^p(a_0 + \dots + o(x^r))$ DL de f à l'ordre $p+r$,

  $g(x) \underset{x\to 0}{=} x^q(b_0 + \dots + o(x^r))$ DL de g à l'ordre $q+r$

  avec $a_0 \neq 0$ et $b_0 \neq 0$. On a :
  $$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{x^p(a_0 + \dots + o(x^r))}{x^q(b_0 + \dots + o(x^r))} \\ &\underset{x\to 0}{=} x^{p-q} \frac{a_0 + \dots + o(x^r)}{b_0 + \dots + o(x^r)} \end{aligned}$$
  On se ramène alors au point précédent pour obtenir un DL à l'ordre $p-q+r$ du quotient. L'ordre a donc été modifié.

Formule 9

$$\tan x \underset{x\to 0}{=} x+\frac{1}{3}x^3+o(x^3)$$

➪ **Exemple 8 :** Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{\operatorname{sh}^2 x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
3. $f : x \mapsto \dfrac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

2.7 Primitivation d'un développement limité

Proposition 22

Soit $f \in \mathcal{C}^1(I)$. Si $f' \in DL_n(a)$:

$$f'(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} a_k(x-a)^k + o((x-a)^n)$$

alors $f \in DL_{n+1}(a)$ et on a :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k+1}(x-a)^{k+1} + o((x-a)^{n+1})$$

Remarque : On peut primitiver un développement limité mais pas le dériver.

Par exemple, posons : $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1+x+x^2\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$.

On a : $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1+x+o(x)$ donc f admet un développement limité à l'ordre 1 et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = 1+2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$, donc f' n'a pas de limite en 0 donc n'a pas de développement limité en 0 à l'ordre 0.

Formule 10

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}\frac{x^k}{k} + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)\end{aligned}$$

Formule 11

$$\begin{aligned}\ln(1-x) &\underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)\end{aligned}$$

Formule 12

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctan} x &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}) \\ &\underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})\end{aligned}$$

➪ **Exemple 9 :** Calculer le développement limité de : $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

➪ **Exemple 10 :** Calculer le développement limité de $\operatorname{Arctan}(x)$ à l'ordre 3 au voisinage de 1.

Proposition 19 : Formule de Taylor-Young

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^n$ sur I. Alors $f \in DL_n(a)$ et :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o((x-a)^n).$$

III Applications des développements limités

3.1 Calculs d'équivalents et de limites

Méthode 4

Pour déterminer un équivalent de f, il faut trouver le premier terme non nul de son développement limité.
Si $f(x) \underset{x\to a}{=} \lambda(x-a)^n + o((x-a)^n$ avec $\lambda \neq 0$, alors :

$$f(x) \underset{x\to a}{\sim} \lambda(x-a)^n.$$

Méthode 5

Pour calculer la limite d'un quotient de fonctions tendant vers 0 : $\frac{f}{g}$ avec $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ et $\underset{x\to a}{g}(x)$=0 :

- on cherche le premier terme non nul de chaque développement limité : $f(x) \underset{x\to a}{=} \lambda(x-a)^n + o((x-a)^n$ et $g(x) \underset{x\to a}{=} \mu(x-a)^m + o((x-a)^m$ avec $\lambda, \mu \neq 0$,
- on en déduit des équivalents : $f(x) \underset{x\to a}{\sim} \lambda(x-a)^n$ et $g(x) \underset{x\to a}{\sim} \mu(x-a)^m$,
- on effectue le quotient d'équivalents (et pas de développements limités) : $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\sim} \frac{\lambda}{\mu}(x-a)^{n-m}$
- on en déduit la limite : $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \frac{\lambda}{\mu}(x-a)^{n-m}$.

➪ **Exemple 11 :** Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x - 2\operatorname{sh}(2x) + \operatorname{sh}(3x)}{\ln(1+x+2x^2) + \sqrt{1-2x} - 1 - x^2},$$
$$\lim_{x\to 0} (2^x + 3^x - 5^x)^{(2^x+3^x-2.5^x)^{-1}}.$$

3.2 Position relative d'une courbe et de sa tangente

Méthode 6 : Position relative d'une courbe et de sa tangente

Lorsque f admet un DL à l'ordre 1 en a, on sait que f est dérivable en a et la courbe représentative de f admet une tangente en a.
L'étude du signe de $f(x) - f(a) - (x-a)f'(a)$ permet de préciser la position de la courbe représentative de la fonction f par rapport à sa tangente.
Si :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p) \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\} \quad \text{et} \quad a_p \in \mathbb{R}^*$$

alors :

$$f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p.$$

Ainsi $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ est du signe de $a_p(x-a)^p$ au voisinage de a :

- si p est pair, $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ est de signe constant au voisinage de a. La courbe est localement au-dessus ou en-dessous de sa tangente en a (suivant le signe de a_p).
- si p est impair, $f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)$ change de signe en a. La courbe traverse sa tangente en a.

➪ **Exemple 12 :** Etudier la tangente en 0 et la position relative de la courbe par rapport à sa tangente pour la fonction :

$$x \mapsto 1 + xe^{-x^2}.$$

3.3 Détermination d'asymptotes

Définition 3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\pm\infty$. S'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) - (ax+b)$ tend vers 0 quand x tend vers $\pm\infty$, on dit que la courbe représentative de f admet une asymptote oblique en $\pm\infty$ d'équation $y = ax+b$.

Méthode 7 : Etude d'une asymptote oblique

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \pm\infty$.
Pour prouver l'existence éventuelle d'une asymptote oblique et étudier sa position relative par rapport à $\mathcal{C}_f$, on procède comme suit :

- On effectue un développement limité au voisinage de $+\infty$ de $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$.
  Supposons que :
  $$\frac{f(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{=} a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_p}{x^p} + o\left(\frac{1}{x^p}\right) \quad \text{avec } p \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\} \quad \text{et} \quad a_p \neq 0$$
- Alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} a_0 x + a_1 + \dfrac{a_p}{x^{p-1}} + o\left(\dfrac{1}{x^{p-1}}\right)$. La courbe admet alors la droite d'équation $y = a_0 x + a_1$ pour asymptote oblique en $+\infty$.
- De plus, $f(x) - a_0 - a_1 x \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{a_p}{x^{p-1}}$.
  Ainsi, $f(x) - a_0 - a_1 x$ est du signe de $\dfrac{a_p}{x^{p-1}}$ au voisinage de $+\infty$.

➪ **Exemple 13 :** Etudier les éventuelles asymptotes à la courbe représentative de la fonction :

$$x \mapsto \sqrt[3]{x^3+1}e^{-1/x}.$$

3.4 Extremum

Méthode 8 : Etude d'un extremum

Supposons que $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + a_p(x-a)^p + o((x-a)^p)$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $a_p \in \mathbb{R}^*$.
Alors $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} a_p(x-a)^p$.

- si p est pair, $f(x) - f(a)$ est de signe constant au voisinage de a. La courbe admet un extremum local en a.
- si p est impair, $f(x) - f(a)$ change de signe au voisinage de a. La courbe n'admet pas d'extremum local en a.

Proposition 23

Soit $f \in \mathcal{C}^2(I)$. Soit $a \in I$ tel que $f'(a) = 0$.

- Si $f''(a) < 0$ alors f admet un maximum local en a
- Si $f''(a) > 0$ alors f admet un minimum local en a.

➪ **Exemple 14 :** Soit $f : x \mapsto \mathrm{sh}(x)\sin(x)$. f admet-elle un extremum local en 0 ?

IV Relations de comparaison : cas de suites

4.1 Définitions et propriétés

Définition 4

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On suppose que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0.
On dit que :

- (u_n) est dominée par (v_n) si et seulement si $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ est bornée.
  On note alors : $u_n = O(v_n)$.
- (u_n) est négligeable devant (v_n) (ou que (v_n) est prépondérante devant la suite (u_n)) si et seulement si $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 0$.
  On note alors $u_n = o(v_n)$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est équivalente à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on note $u_n \sim v_n$ si et seulement si $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.
  On note alors $u_n \sim v_n$.

Proposition 24

Soient (u_n), (v_n) deux suites telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang n_0.

- Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n = O(v_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$
- $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n - v_n = o(v_n)$

Proposition 25

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que (v_n) et (w_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

- Si $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n = O(w_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n = o(w_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$ et $v_n \sim w_n$, alors $u_n \sim w_n$.

Proposition 26

Soient (u_n), (v_n), (w_n) des suites telles que (w_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.

- Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(w_n)$, alors $u_n + v_n = O(w_n)$.
- Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(w_n)$, alors $u_n + v_n = o(w_n)$.

⚠⚠⚠ On ne somme pas les équivalents. ⚠⚠⚠

Proposition 27

Soient (u_n), (v_n) des suites telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Si $u_n = O(v_n)$ alors $\lambda u_n = O(v_n)$.
- Si $u_n = o(v_n)$ alors $\lambda u_n = o(v_n)$.
- Si $u_n \sim v_n$ alors $\lambda u_n \sim \lambda v_n$.

Proposition 28

Soient (u_n), (v_n), (w_n) et (t_n) quatre suites telles que (w_n) et (t_n) ne s'annulent pas à partir d'un certain rang.

- Si $u_n = O(w_n)$ et $v_n = O(t_n)$, alors $u_n v_n = O(w_n t_n)$.
- Si $u_n = o(w_n)$ et $v_n = o(t_n)$, alors $u_n v_n = o(w_n t_n)$.
- Si $u_n \sim w_n$ et $v_n \sim t_n$, alors $u_n v_n \sim w_n t_n$.

Proposition 29

Soient (u_n), (v_n) des suites telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si de plus, (u_n^α) et (v_n^α) sont bien définies.
Si $u_n \sim v_n$ alors $u_n^\alpha \sim v_n^\alpha$.

➪ **Exemple 15 :** Trouver une suite simple équivalente à :

1. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n}$,

2. $u_n = \dfrac{1-\cos(\frac{1}{n})}{e^{1/n^2}-1}$,

4.2 Equivalent et encadrement

Proposition 30

Soient (u_n), (v_n), (w_n) des suites telles que (w_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Si : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $u_n \sim w_n$, alors :

$$v_n \sim u_n.$$

➪ **Exemple 16 :** On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2\sqrt{k+1}} \leq \sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leq \frac{1}{2\sqrt{k}}$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2(\sqrt{n+1}-1) \leq u_n \leq 2(\sqrt{n+1}-\frac{1}{2})$.

3. En déduire un équivalent de (u_n).

4.3 Equivalents et limites

Proposition 31

Soit (u_n) une suite et $l \in \mathbb{R}^*$. Si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ alors $u_n \sim l$.

Proposition 32

Soit (u_n), (v_n) des suites telles que (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
Si $u_n \sim v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$.

➪ **Exemple 17 :** Calculer :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n + \sqrt{n^2+1}} - \sqrt{n + \sqrt{n^2-1}}\right).$$

4.4 Equivalents et signe

Proposition 33

Soient (u_n) et (v_n) deux suites avec (v_n) ne s'annulant pas à partir d'un certain rang.
Si $u_n \sim v_n$ et si (u_n) est strictement négative (resp. strictement positive) à partir d'un certain rang alors (v_n) est strictement négative (resp. strictement positive) à partir d'un certain rang.

V Problèmes d'analyse asymptotique

Méthode 9 : Développement limité d'une bijection réciproque

Pour calculer le développement limité de f^{-1} à l'ordre n :

- On justifie l'existence du développement limité de f^{-1} avec la formule de Taylor-Young.
- On écrit le développement limité avec des coefficients indéterminés en utilisant, si c'est le cas, un argument d'imparité afin de réduire le nombre de coefficients.
- On calcule le développement limité de f à l'ordre n.
- On calcule, par composition, le développement limité de $f \circ f^{-1}$ à l'ordre n.
- On utilise la relation $f \circ f^{-1}(x) = x$ et l'unicité du développement pour en déduire une relation sur les coefficients indéterminés.
- On calcule les coefficients.

➪ **Exemple 18 :** Montrer que sh est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ et déterminer le développement limité de sh^{-1} en 0 à l'ordre 4.

Méthode 10 : Développement asymptotique d'une suite

On considère une suite qui peut être définie par récurrence, de façon implicite, par une intégrale,...

- On cherche un équivalent en utilisant ou bien une limite, ou bien un encadrement.
- Dans le cas d'une suite d'intégrales, on cherche une relation entre les termes en effectuant une intégration par parties. Dans les autres cas, la relation est la définition de la suite.
- On injecte le développement obtenu par l'équivalent dans la relation.
- On obtient un nouveau développement.
- On réitère.

➪ **Exemple 19 :** On pose : $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + n^2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ n - 1 \leq u_n \leq n$.
2. En déduire : $u_n = n + o(n)$.
3. En déduire : $u_n = n - \frac{1}{2} + o(1)$.
4. En déduire : $u_n = n - \frac{1}{2} - \frac{3}{8n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

➪ **Exemple 20 :**

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $x + \sqrt[3]{x} = n$ admet une unique solution $x_n \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que : $x_n = n + o(n)$.
3. En déduire : $x_n = n - \sqrt[3]{n} + o(\sqrt[3]{n})$.
4. En déduire : $x_n = n - \sqrt[3]{n} + \frac{1}{3\sqrt[3]{n}} + o(+\frac{1}{\sqrt[3]{n}})$.

➪ **Exemple 21 :** On pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$.

1. Montrer que $\lim I_n = 1$.
2. Montrer que $I_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.

➪ **Exemple 22 :**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $\tan x = x$ admet une unique solution dans $\left]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right[$ que l'on notera x_n.
   On définit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 0}$.
2. (a) Montrer que :
   $$x_n \sim n\pi$$
   (b) Montrer que :
   $$x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} \sim -\frac{1}{n\pi}$$
3. Montrer que :
   $$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$