Chapitre 17 : Représentation des graphes

La théorie des graphes permet de représenter de façon formelle des réseaux reliant des objets comme, par exemple : un réseau de transport, les réseaux sociaux.

La première introduction de notions liées à la théorie des graphes a été faite en 1735 par Euler qui a montré qu'il était impossible de passer une unique fois par chacun des sept ponts de la ville de Königsberg en revenant à son point de départ. Cependant la théorie des graphes n'a été vraiment développée qu'à partir du 19ème siècle.

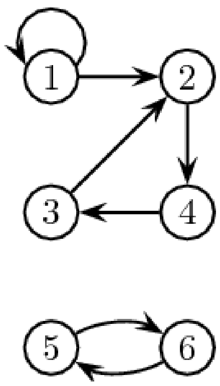
Cette théorie concerne à la fois les mathématiques et l'informatique. Par exemple, le théorème des quatre couleurs affirme qu'il est possible de colorier une carte avec 4 couleurs de façon à ce que deux régions limitrophes soient de couleurs distinctes. Ce théorème n'a jamais été prouvé avec des arguments mathématiques mais sa preuve nécessite l'utilisation d'outils informatiques.

I Vocabulaire des graphes

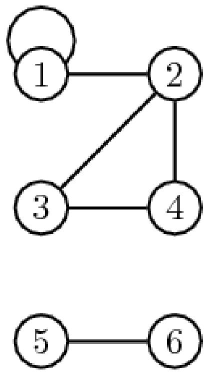
1.1 Généralités

- Un **graphe** G est un couple $G = (S, A)$ où :
  - S est un ensemble non vide. Les éléments de S sont appelés les **sommets** ou les **noeuds** du graphe G.
  - A est un ensemble de couples (x, y) ou de paires $\{x, y\}$ avec $x, y \in S$. Les éléments de A sont appelés les **arêtes** du graphe G.
- Si les éléments de A sont des paires, comme la paire $\{x, y\}$ est en égale à la paire $\{y, x\}$, on dit que G est un **graphe non orienté**. Dans ce cas, les arêtes n'ont pas de sens de parcours.
- Si les éléments de A sont des couples, comme le couple (x, y) est en général différent du couple (y, x), on dit que G est un **graphe orienté**. dans ce cas, les arêtes ont un sens de parcours et les arêtes sont également appelées **arcs**.

Les graphes sont représentés par des schémas dans lesquels les sommets sont représentés par des points et les arêtes par des lignes (cas d'un graphe non orienté) ou des flèches (cas d'un graphe orienté), chacune reliant deux points.



Graphe orienté
$G_{ex} = (S, A)$ avec :
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A = \{(1, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 3), (5, 6), (6, 5)\}$



Graphe non orienté
$G_{ex} = (S, A)$ avec :
$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$A = \{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{5, 6\}\}$

On considèrera cet exemple dans toute la suite du cours.

Comme un graphe non orienté peut être facilement transformé en un graphe orienté, si ce n'est pas précisé, on considèrera que le graphe est orienté.

- Si deux sommets sont reliés par une arête, on dit qu'ils sont **adjacents** ou **voisins**. Ces deux sommets sont alors appelés les **extrémités** de l'arête.
  Dans le graphe G_{ex}, les sommets 2 et 4 sont adjacents mais les sommets 1 et 4 ne sont pas adjacents.
- Une arête de la forme $\{x, x\}$ est appelée une **boucle**.
  Le graphe G_{ex} possède une seule boucle qui est $\{1, 1\}$.

Le réseau internet peut être vu comme un graphe dont les sommets sont les machines et les arêtes sont les connexions. La taille de ce graphe se compte en milliards. Les exemples étudiés sont donc très éloignés de la réalité et il faudra en tenir compte lors de l'écriture d'algorithmes.

1.2 Degré

Soit $G = (S, A)$ un graphe.

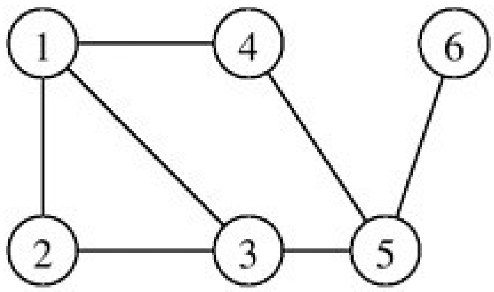
- Si G est un graphe non orienté. Soit $s \in S$, c'est-à-dire soit s un sommet de G. Le **degré** de s noté $d(s)$ est le nombre d'arêtes dont s est une extrémité, en comptant les boucles pour 2 arêtes.
  Pour G_{ex} : $d(1) = 3$, $d(2) = 3$, $d(3) = 2$, $d(4) = 2$, $d(5) = 1$ et $d(6) = 1$.
- Si G est un graphe orienté. Soit $s \in S$, c'est-à-dire soit s un sommet de G.
  - Le **degré entrant** de s noté $d_+(s)$ est le nombre d'arêtes dont s est l'extrémité initiale.
    Pour G_{ex} : $d_+(1) = 2$, $d_+(2) = 1$, $d_+(3) = 1$, $d_+(4) = 1$, $d_+(5) = 1$ et $d_+(6) = 1$.
  - Le **degré sortant** de s noté $d_-(s)$ est le nombre d'arêtes dont s est l'extrémité finale.
    Pour G_{ex} : $d_-(1) = 1$, $d_-(2) = 2$, $d_-(3) = 1$, $d_-(4) = 1$, $d_-(5) = 1$ et $d_-(6) = 1$.

1.3 Connexité

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté.

- Soient s_0 et s_n des sommets de G. Un **chemin** de s_0 à s_n est une suite de sommets adjacents $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ reliant s_0 et s_n. Le nombre d'arêtes du chemin $(s_0, s_1, \dots, s_n)$ est alors n et est appelé la **longueur du chemin** $(s_0, s_1, \dots, s_n)$
  Pour G_{ex} : $(1, 2, 3, 4)$ et $(1, 2, 4)$ sont des chemins, de longueurs respectives 3 et 2, reliant 1 à 4.
- La **distance** entre deux sommets est la longueur minimale d'un chemin reliant ces deux sommets. Si ces deux sommets ne peuvent être reliés, on considère alors que la distance est infinie.
  Pour G_{ex} : la distance entre 1 et 4 est 2, la distance entre 1 et 5 est ∞.
- Un **cycle** est un chemin constitué d'arêtes distinctes reliant un sommet à lui même.
  Pour G_{ex} : $(2, 3, 4, 2)$ est un cycle mais $(5, 6, 5)$ n'est pas un cycle.
- On dit qu'un graphe est **connexe** ssi pour tout couple de sommets, il existe un chemin reliant ces deux sommets.
  G_{ex} n'est pas connexe car il n'existe pas de chemin reliant 1 à 5.

➪ **Exemple 1 :** On considère le graphe non orienté suivant :



1. Quel est le degré du sommet 3 ?

2. Donner un chemin du sommet 1 au sommet 6 :

3. Quelle est la distance entre les sommets 2 et 4 ?

4. Donner un exemple de cycle :

5. Le graphe est-il connexe ?

II Représentations des graphes

2.1 Listes d'adjacence

Soit $G = (S, A)$ un graphe.

La représentation de G par des **listes d'adjacence** consiste à donner, pour chaque sommet, la liste (dans un ordre quelconque) de :

- ses sommets adjacents, dans le cas d'un graphe non orienté.
  Pour G_{ex} : 1 : [1,2], 2 : [1,3,4], 3 : [2,4], 4 : [2,3], 5 : [6], 6 : [5].
- ses sommets adjacents pour lesquels il est l'extrémité initiale de l'arc les reliant.
  Pour G_{ex} : 1 : [1,2], 2 : [4], 3 : [2], 4 : [3], 5 : [6], 6 : [5].

Cette représentation définit entièrement le graphe.

➪ **Exemple 2 :** Représenter le graphe orienté ayant pour listes d'adjacence :

$$1:[2,3,6],\quad 2:[3],\quad 3:[\,],\quad 4:[3,4],\quad 5:[\,],\quad 6:[1,3].$$

Les représentations en Python des listes d'adjacence peuvent être faites en utilisant :

- une liste : le graphe G est représenté par une liste dont les éléments sont des listes ayant pour premier terme un sommet et comme deuxième terme la liste d'adjacence de ce sommet.

$$G_{ex} = [[1,[1,2]],[2,[1,3,4]],[3,[2,4]],[4,[2,3]],[5,[6]],[6,[5]]] \text{ (cas non orienté)}$$

$$G_{ex} = [[1,[1,2]],[2,[4]],[3,[2]],[4,[3]],[5,[6]],[6,[5]]] \text{ (cas orienté)}$$

- un dictionnaire : le graphe de G est représenté par un dictionnaire sont les clés sont les sommets et les valeurs associées sont les listes d'adjacences.

$$G_{ex} = \{1:[1,2],2:[1,3,4],3:[2,4],4:[2,3],5:[6],6:[5]\} \text{ (cas non orienté)}$$

$$G_{ex} = \{1:[1,2],2:[4],3:[2],4:[3],5:[6],6:[5]\} \text{ (cas orienté)}$$

2.2 Matrice d'adjacence

On suppose, quitte à renommer les sommets, qu'ils sont numérotés de 1 à n. La **matrice d'adjacence** est une matrice carrée de taille n : $M = (m_{i,j})$ telle que :

$$\forall i,j \in [\![1,n]\!],\ m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe une arête de } i \text{ vers } j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour G_{ex} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cas non orienté

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cas orienté

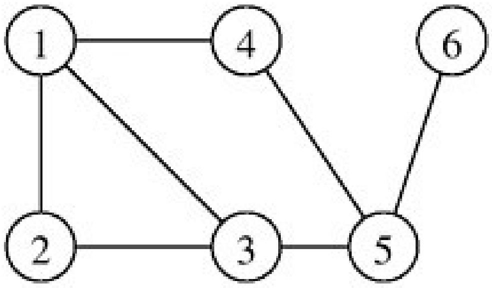
On remarquera que la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.

Les représentations en Python de matrices d'adjacence sont faites en utilisant des listes de listes. Pour G_{ex} :

$$[[1,1,0,0,0,0],[1,0,1,1,0,0],[0,1,0,1,0,0],[0,1,1,0,0,0],[0,0,0,0,0,1],[0,0,0,0,1,0]] \text{ (Cas non orienté)}$$

$$[[1,1,0,0,0,0],[0,0,0,1,0,0],[0,1,0,0,0,0],[0,0,1,0,0,0],[0,0,0,0,0,1],[0,0,0,0,1,0]] \text{ (Cas orienté)}$$

➪ **Exemple 3 :** On considère le graphe non orienté suivant :



1. Ecrire le dictionnaire qui représente les listes d'adjacences.

2. Ecrire la matrice d'adjacence.

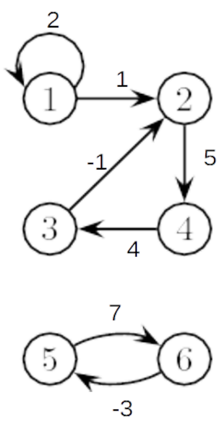
III Pondération d'un graphe

On dit qu'un graphe est :

- **pondéré** si un nombre appelé **poids** est associé à chaque arête du graphe,
- **étiqueté** si un texte appelé **étiquette** est associé à chaque arête du graphe.

Un graphe pondéré ou étiqueté permet d'avoir des informations supplémentaires. Par exemple, si on considère un réseau routier dont les sommets sont les villes, on peut prendre comme poids la distance entre chaque ville et comme étiquette le nom de la route reliant les villes.

Les graphes pondérés peuvent être représentés en utilisant les matrices d'adjacence. Dans ce cas, s'il existe une arête reliant deux sommets, le coefficient associé dans la matrice est égal à son poids.



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice d'adjacence