Chapitre 19 : Dénombrement

I Cardinal d'un ensemble fini

1.1 Définition

Définition 1

Soient E et F deux ensembles. On dit que E et F sont equipotents ssi il existe une bijection de E dans F.

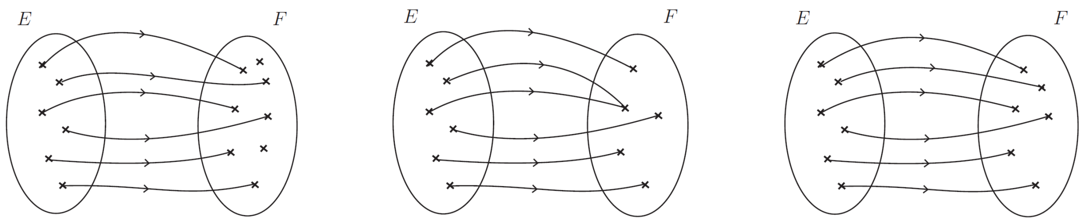
Définition 2

Un ensemble E non vide est dit fini , s'il existe un entier naturel non nul n et une bijection de $[\![1, n]\!]$ dans E.
Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini.

Théorème 1

Soient $n, p \in \mathbb{N}$.

- Il existe une injection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ ssi $p \leq n$.
- Il existe une surjection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ ssi $p \geq n$.
- Il existe une bijection de $[\![1, p]\!]$ dans $[\![1, n]\!]$ ssi $p = n$.



(a) Application injective (b) Application surjective (c) Application bijective

Définition 3

Soit E un ensemble fini. L'unique entier naturel n tel que E et $[\![1, n]\!]$ soient equipotents est appelé cardinal de E.
On le note $\operatorname{Card}(E)$ ou $|E|$.

Remarque : Par convention, on considère que $\emptyset$ est fini et que $\operatorname{Card}(\emptyset) = 0$.

Corollaire 1

Soient E et F deux ensembles finis.

- Il existe une injection de E dans F ssi $\operatorname{Card}(E) \leq \operatorname{Card}(F)$.
- Il existe une surjection de E dans F ssi $\operatorname{Card}(E) \geq \operatorname{Card}(F)$.
- Il existe une bijection de E dans F ssi $\operatorname{Card}(E) = \operatorname{Card}(F)$.

1.2 Cardinal d'une partie d'un ensemble fini

Lemme 1

Si E est fini non vide et $a \in E$, alors $E \setminus \{a\}$ est fini et $\operatorname{Card}(E \setminus \{a\}) = \operatorname{Card}(E) - 1$.

Preuve. Comme E est fini et non vide, on pose $n = \operatorname{Card}(E) \in \mathbb{N}^*$.
Alors il existe $f : [\![1,n]\!] \to E$ bijection.
De plus, il existe un unique $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $f(k) = a$.
Posons :

$$g: \begin{array}{ccl} [\![1,n-1]\!] & \to & E \setminus \{a\} \\ j & \mapsto & \begin{cases} f(j) \text{ si } j < k \\ f(j+1) \text{ si } j \geq k \end{cases} \end{array}.$$

- Montrons que g est bien définie.
  Soit $j \in [\![1,n-1]\!]$. On a :
  - Si $j < k$ alors $j \neq k$ et comme f est injective $f(j) \neq f(k)$ donc $g(j) = f(j) \neq a$.
  - Si $j \geq k$ alors $j+1 \neq k$ et comme f est injective $f(j+1) \neq f(k)$ donc $g(j) = f(j+1) \neq a$.

  Dans tous les cas $g(j) \in E \setminus \{a\}$. Ainsi g est bien définie.
- Montrons que g est injective.
  Soit $i, j \in [\![1,n-1]\!]$. Supposons que $g(i) = g(j)$.
  Alors :
  - Si $i < k$ et $j < k$ alors $g(i) = f(i)$ et $g(j) = f(j)$ donc $f(i) = f(j)$. Or f est injective. Donc $i = j$.
  - Si $i \geq k$ et $j \geq k$ alors $g(i) = f(i+1)$ et $g(j) = f(j+1)$ donc $f(i+1) = f(j+1)$. Or f est injective. Donc $i+1 = j+1$ ainsi $i = j$.
  - Si $i < k$ et $j \geq k$ alors $g(i) = f(i)$ et $g(j) = f(j+1)$ donc $f(i) = f(j+1)$. Or f est injective. Donc $i = j+1$, or $i < k$ donc $j+1 < k$, ainsi $j < k-1$ ce qui contredit $j \geq k$. Ce cas est donc impossible.
  - De même le cas $i \geq k$ et $j < k$ est impossible.

  Donc, dans tous les cas (possibles), on a $i = j$.
  Ainsi g est injective.
- Montrons que g est surjective.
  Soit $x \in E \setminus \{a\}$. Comme f est surjective, il existe $i \in [\![1,n]\!]$ tel que $f(i) = x$.
  Comme $x \neq a$ et f injective, on a $i \neq k$.
  - Si $i < k$ alors $g(i) = f(i) = k$ et $i \in [\![1,n-1]\!]$.
  - Si $i > k$ alors $i-1 \geq k$ et $i-1 \in [\![1,n-1]\!]$, de plus $g(i-1) = f(i) = x$.

  Dans tous les cas, il existe $j \in [\![1,n-1]\!]$ tel que $g(j) = x$. Donc g est surjective.

Ainsi, g est bijective donc $E \setminus \{a\}$ est fini de cardinal $n-1$.

□

Théorème 2 : Partie d'un ensemble fini

Soit E un ensemble fini et F est un sous-ensemble de E, alors :
F est fini et $\operatorname{Card}(F) \leq \operatorname{Card}(E)$.

Preuve. On raisonne par récurrence.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$\mathcal{P}(n)$: « Si E est un ensemble fini de cardinal n, tout sous-ensemble F de E est fini de cardinal inférieur ou égal à n »

- Pour $n = 0$, soit E un ensemble de cardinal 0.
  Alors $E = \emptyset$ et le seul sous-ensemble de E est $F = \emptyset$. Il est fini de cardinal 0, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
  Soient E un ensemble de cardinal $n+1$ et F un sous-ensemble de E.
  Si $F = E$, alors F est fini de cardinal $n+1$ donc $\operatorname{Card}(F) \leq \operatorname{Card}(E)$.
  Supposons $F \neq E$. On a alors $a \in E \setminus F$. D'après le lemme 1, $E_1 = E \setminus \{a\}$ est fini de cardinal n, et $F \subset E_1$ (puisque $a \notin F$). Par hypothèse de récurrence, on a donc F fini de cardinal $\leq \operatorname{Card}(E_1) = n < n+1$. Ainsi, on a $\operatorname{Card}(F) \leq \operatorname{Card}(E)$.
  On a donc montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
  En conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie.

□

Proposition 1

Soit E un ensemble fini et A, B des sous-ensembles de E tels que $A \subset B$, alors :

$$\operatorname{Card}(A) = \operatorname{Card}(B) \iff A = B.$$

Preuve.

□

1.3 Applications entre ensembles finis

Théorème 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Toute injection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est bijective.
- Toute surjection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,n]\!]$ est bijective.

Preuve. Soit $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$.

- Supposons f injective.
  Supposons f non surjective. Alors il existe $y \in [\![1,n]\!]$ tel que :
  $$\forall x \in [\![1,n]\!],\ f(x) \neq y.$$
  On pose alors $g : \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] & \to & [\![1,n]\!] \setminus \{y\} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.
  g est injective car f l'est.
  Donc :
  $$\mathrm{Card}\,([\![1,n]\!]) \leq \mathrm{Card}\,([\![1,n]\!] \setminus \{y\}).$$
  Donc $n \leq n-1$ ce qui est absurde. Ainsi f est injective et surjective, donc f est bijective.
- Supposons f surjective.
  Supposons f non injective. Alors il existe $x_1, x_2 \in [\![1,n]\!]$ tels que :
  $$x_1 \neq x_2 \text{ et } f(x_1) = f(x_2).$$
  On pose alors $g : \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] \setminus \{x_1\} & \to & [\![1,n]\!] \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.
  Montrons que g est surjective.
  Soit $y \in [\![1,n]\!]$. Comme f est surjective, il existe $x \in [\![1,n]\!]$ tel que $y = f(x)$.
  - Si $x \neq x_1$, alors $y = g(x)$.
  - Si $x = x_1$, alors $y = f(x_1) = f(x_2) = g(x_2)$.

  Donc g est surjective.
  Donc :
  $$\mathrm{Card}\,([\![1,n]\!]) \setminus \{x_1\} \geq \mathrm{Card}\,([\![1,n]\!]).$$
  Donc $n-1 \geq n$ ce qui est absurde. Ainsi f est injective et surjective, donc f est bijective.

□

Corollaire 2

Soient E et F des ensembles finis non vides tels que $\mathrm{Card}\,E = \mathrm{Card}\,F$. Soit $f : E \to F$. On a :

$$f \text{ injective ssi } f \text{ surjective ssi } f \text{ bijective.}$$

1.4 Opérations sur les cardinaux

Proposition 2

Si A et B sont deux ensembles finis disjoints (c'est à dire que $A \cap B = \emptyset$), alors $A \cup B$ est fini et

$$\mathrm{Card}\,(A \cup B) = \mathrm{Card}\,(A) + \mathrm{Card}\,(B).$$

Remarque : En combinatoire, lorsqu'on fait des cas disjoints, cela correspond à une réunion disjointe, il faut donc sommer le nombre de choix possibles.

Preuve.

□

Corollaire 3

Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille d'ensembles finis deux à deux disjoints.

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i\in[\![1,n]\!]} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Card}\,(A_i).$$

Remarque : Si E est un ensemble fini, alors, $E = \bigcup_{x\in E}\{x\}$ et il s'agit d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints donc :

$$\mathrm{Card}\,(E) = \sum_{x\in E} \mathrm{Card}\,\{x\} = \sum_{x\in E} 1.$$

On sait donc calculer la somme des 1 indexée car un ensemble fini quelconque.

➪ **Exemple 1 :** Déterminer le cardinal de l'ensemble :

$$E = \{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2,\ i<j\}.$$

Corollaire 4

Si E est fini et $A\in\mathcal{P}(E)$, alors :

$$\mathrm{Card}\,(E\setminus A) = \mathrm{Card}\,(E) - \mathrm{Card}\,(A).$$

Preuve.

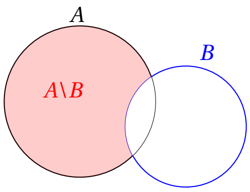
□

Corollaire 5

Soient A et B deux ensembles finis. Alors :

$$\text{Card}\,(A \setminus B) = \text{Card}\,(A) - \text{Card}\,(A \cap B).$$

Si $B \subset A$, alors $\text{Card}\,(A \setminus B) = \text{Card}\,(A) - \text{Card}\,(B)$.



Preuve.

□

Proposition 3

Soient A et B deux ensembles finis. Alors $A \cup B$ est fini et on a :

$$\text{Card}\,(A \cup B) = \text{Card}\,(A) + \text{Card}\,(B) - \text{Card}\,(A \cap B).$$

Preuve.

□

Proposition 4

Soient E et F deux ensembles finis, alors $E \times F$ est fini et :

$$\operatorname{Card}(E \times F) = \operatorname{Card}(E).\operatorname{Card}(F).$$

Remarque : En combinatoire, lorsqu'on fait deux choix successifs, cela revient à regarder des couples, il faut donc multiplier le nombre de choix possibles.

Preuve. Notons $n = \operatorname{Card}(E)$, $p = \operatorname{Card}(F)$ et $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ où les e_i sont deux à deux distincts.
$E \times F = \Big(\{e_1\} \times F\Big) \cup \Big(\{e_2\} \times F\Big) \cup \ldots \cup \Big(\{e_n\} \times F\Big)$.
M✎ *On écrit le produit cartésien comme un produit d'ensembles plus simples.*
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $F_i = \Big(\{e_i\} \times F\Big)$.
Les F_i avec $i \in [\![1, n]\!]$ sont deux à deux disjoints et $E \times F = \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i$.
Ainsi, $\operatorname{Card}(E \times F) = \sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{Card}(F_i)$.
Soit $i \in [\![1, p]\!]$, l'application $f_i : \begin{array}{ccc} F & \to & F_i \\ f & \mapsto & (e_i, f) \end{array}$ est bijective, donc $\operatorname{Card}(F_i) = \operatorname{Card}(F) = p$.
Ainsi $\operatorname{Card}(E \times F) = \sum\limits_{i=1}^{n} \operatorname{Card}(F_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} p = np$. □

Corollaire 6

- Soient $E_1, \ldots E_p$ des ensembles finis. Alors $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_p$ est fini et $\operatorname{Card}(E_1 \times \ldots \times E_p) = \prod\limits_{i=1}^{p} \operatorname{Card}(E_i)$.
- En particulier, si E est un ensemble fini, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, E^p est fini de cardinal $(\operatorname{Card}(E))^p$.

Remarque : Lorsque l'on choisit successivement p éléments dans un ensemble à n éléments, avec répétitions possibles (**tirages successifs et avec remise**) donc lorsque l'ordre est pris en compte et que les répétitions sont possibles, on cherche le nombres de p-uplets dont les composantes sont dans un ensemble à n éléments, il y a donc n^p possibilité.

1.5 Cardinal d'ensembles d'applications

Proposition 5

Soient E et F sont deux ensembles finis. Alors l'ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ des applications de E dans F est un ensemble fini et :

$$\operatorname{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \operatorname{Card}(F)^{\operatorname{Card}(E)}.$$

Preuve.

□

1.6 Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini

Proposition 6

Soit E un ensemble fini. Alors l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est fini et :

$$\text{Card}\,(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}\,(E)}.$$

Preuve.

□

II Listes et combinaisons

2.1 Listes

Proposition 7 : Nombre de p-listes d'éléments distincts

Soit E un ensemble fini de cardinal n et $p \in \mathbb{N}^*$. Le nombre de p-listes ou p-uplets d'éléments deux à deux distincts de E est égal à :

$$\begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

Remarque : Lorsque l'on choisit successivement p éléments dans un ensemble à n éléments, sans répétition possible (**tirages successifs et sans remise**) donc lorsque l'ordre est pris en compte et que les répétitions ne sont pas possibles, on cherche le nombres de p-uplets dont les composantes sont dans un ensemble à n éléments et sont deux à deux distinctes, il y a donc $\dfrac{n!}{(n-p)!}$ possibilité, si $p \leq n$.

➪ **Exemple 2 :** On considère un jeu de 52 cartes. On tire successivement 12 cartes sans remise que l'on place devant soi dans l'ordre de tirage.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. Quel est le nombre de tirages commençant par un as ?
3. Quel est le nombre de tirages contenant 4 as successifs ?

Proposition 8 : Nombre d'injections

Le nombre d'injections d'un ensemble E de cardinal $p \in \mathbb{N}^*$ dans un ensemble F de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ est :

$$\begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } p \leq n \\ 0 & \text{si } p > n \end{cases}$$

Corollaire 7

Si E est un ensemble fini de cardinal n. L'ensemble des bijections de E sur E (appelées également permutations de E) est fini et a pour cardinal : $n!$.

➪ **Exemple 3 :** Combien y a-t-il d'anagrammes du mot MATHS ?

➪ **Exemple 4 :** 25 personnes font la queue dans une fille d'attente.

1. Combien y a-t-il de files possibles ?
2. On considère qu'une certaine personne est toujours en premier. Combien y a-t-il de files possibles ?
3. On considère qu'il y a 15 femmes et 10 hommes et que les femmes passent en premier. Combien y a-t-il de files possibles ?

2.2 Combinaisons

Proposition 9

Soient E un ensemble fini de cardinal n et $p \in [\![0, n]\!]$. Le nombre de partie à p éléments de E est $\binom{n}{p}$.

Remarque : Lorsque l'on choisit simultanément p éléments dans un ensemble à n éléments (**tirages simultanés**) donc lorsque l'ordre n'est pas pris en compte et que les répétitions ne sont pas possibles, on cherche le nombres d'ensembles à p éléments dans un ensemble à n éléments, il y a donc $\binom{n}{p}$ possibilités.

➪ **Exemple 5 :** Combien y a-t-il d'anagrammes du mot BAOBAB ?

➪ **Exemple 6 :** On constitue un comité de 8 personnes choisies parmi 15 femmes et 12 hommes.

1. Combien y a-t-il de comités possibles ?
2. Combien y a-t-il de comités composés de 4 hommes et de 4 femmes ?
3. Combien y a-t-il de comités composés d'au moins 2 femmes ?

➪ **Exemple 7 :** On veut distribuer 7 prospectus dans 10 boîtes aux lettres nominatives. Combien y a-t-il de possibilités si :

1. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?
2. on met au plus un prospectus par boîte et les prospectus sont tous différents ?
3. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont tous différents ?
4. on met un nombre quelconque de prospectus par boîte et les prospectus sont identiques ?

➪ **Exemple 8 :** Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Déterminer le nombre de couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \subset Y$.

2.3 Démonstration combinatoire de la formule de Pascal

Proposition 10Formule de Pascal

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$ alors on a : $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$

Preuve. Donnons ici une preuve combinatoire :
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [\![1, n-1]\!]$.
Considérons un ensemble E de cardinal n. Il y a $\binom{n}{p}$ parties à p éléments.
Soit $a \in E$, pour avoir une partie de E à p éléments, on distingue :

- Celles qui contiennent a. Il y en a $\binom{n-1}{p-1}$: choix de $p-1$ éléments parmi les $n-1$ éléments de $E \backslash \{a\}$.
- Celles qui ne contiennent pas a. Il y en a $\binom{n-1}{p}$: choix de p éléments parmi les $n-1$ de $E \backslash \{a\}$.

Comme ces ensembles sont disjoints, on a : $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$ et on retrouve la formule de Pascal. □

Remarque : On peut utiliser des arguments combinatoires pour avoir l'idée de la formule du binôme de Newton :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Commençons par écrire l'égalité :

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b) \times (a+b) \times \ldots \times (a+b)}_{n \text{ fois}}$$

Pour développer ce produit, il faut additionner tous les produits possibles du type :

$$\underbrace{a \times a \times b \times a \times \ldots \times b \times a}_{n \text{ termes}}$$

Tous ces produits seront de la forme $a^k b^{n-k}$ avec $k \in [\![0, n]\!]$. On prend un facteur dans chaque parenthèse. Pour k fixé dans $[\![0, n]\!]$, il a $\binom{n}{k}$ façons d'obtenir $a^k b^{n-k}$. On choisit pour cela k parenthèses où l'on prend le complexe a, et on prendra nécessairement b dans les $n-k$ restantes. On obtient donc la formule annoncée.