Chapitre 2 : Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

I Sommes

1.1 Définitions

Définition 1

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels.
On définit par récurrence la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{n+1} = S_n + a_{n+1}$. On note alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

On note également, pour tout $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$, tels que $N_1 \leq N_2$:

$$S_{N_2} - S_{N_1-1} = \sum_{k=N_1}^{N_2} a_k.$$

Remarque :

- Ces définitions sont cohérentes avec l'idée intuitive de la sommation :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n,$$

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} a_k = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_2-1} + a_{N_2}) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_1-2} + a_{N_1-1}) = a_{N_1} + a_{N_1+1} + \cdots + a_{N_2-1} + a_{N_2}.$$

- La notation avec des points de suspension n'est pas assez rigoureuse pour être utilisée dans des raisonnements, elle peut être seulement utilisée dans des brouillons.
- La quantité $\sum_{k=1}^{n} a_k$ ne dépend que de n et pas de k. On dit que l'indice de sommation k est muet. Il peut ainsi être remplacé par un autre indice non utilisé. Par exemple :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

➪ **Exemple 1 :** Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} a_k = 2n.$$

$$\forall j \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{j} a_k = \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{j=1}^{n} a_j =$$

Définition 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $I = \{i_k, k \in [\![1, n]\!]\}$ (les i_k sont 2 à 2 distincts) un ensemble fini à n éléments et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels indexée par I, on pose : $\sum_{i\in I} a_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i_k}$.
Si $I = \emptyset$, on pose par convention $\sum_{i\in I} a_i = 0$.

Remarque :

- Avec cette définition, toutes les sommes indexées par un ensemble fini se ramènent à des sommes indexées par un intervalle d'entiers.

➪ **Exemple 2 :**

- Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k\in[\![1,n]\!]} a_k =$$

- Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit I_n l'ensemble des nombres pairs inférieurs ou égaux à $2n$, on a :

$$\sum_{i\in I_n} a_i =$$

1.2 Opérations sur les sommes

Proposition 1

Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} a_k + \mu \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Remarque : On dit que la sommation est linéaire.

Preuve.

□

Corollaire 1

Soit I un ensemble fini, soient $(a_k)_{k\in I}$, $(b_k)_{k\in I}$ deux familles de nombres réels, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

$$\sum_{k\in I} (\lambda a_k + \mu b_k) = \lambda \sum_{k\in I} a_k + \mu \sum_{k\in I} b_k.$$

Proposition 2

Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels, Soient N_1, N_2, $N_3 \in \mathbb{N}^*$ tels que $N_1 \leq N_2 \leq N_3$. On a :

$$\sum_{k=N_1}^{N_3} a_k = \sum_{k=N_1}^{N_2} a_k + \sum_{k=N_2+1}^{N_3} a_k.$$

En particulier :

$$\sum_{k=N_1}^{N_3} a_k = a_{N_1} + \sum_{k=N_1+1}^{N_3} a_k.$$

$$\sum_{k=N_1}^{N_3} a_k = \sum_{k=N_1}^{N_3-1} a_k + a_{N_3}.$$

Remarque : On parle de découpage ou de regroupement de termes.

Corollaire 2

Soit I un ensemble fini non vide. Si I est la réunion de deux sous-ensembles disjoints I_1 et I_2, alors :

$$\sum_{k\in I} a_k = \sum_{k\in I_1\cup I_2} a_k = \sum_{k\in I_1} a_k + \sum_{k\in I_2} a_k$$

➪ **Exemple 3 :** Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. Soit $n\in\mathbb{N}$.
En regroupant les termes pairs et les termes impairs, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} a_{2k} + \sum_{k=0}^{n} a_{2k+1} =$$

1.3 Changement d'indice

Proposition 3

Soient $p,q\in\mathbb{N}$ tels que $p\leq q$. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

- Soit $d\in\mathbb{Z}$ tel que $p+d\geq 0$, on a :
$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{j=p+d}^{q+d} a_{j-d}.$$
On dit qu'on a effectué le changement d'indice $j=k+d$.
- Soit $d\in\mathbb{N}$ tel que $d-q\geq 0$, on a :
$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{j=d-q}^{d-p} a_{d-j}.$$
On dit qu'on a effectué le changement d'indice $j=d-k$.

Remarque :

- Dans une somme, si la borne inférieure est strictement plus grande que la borne supérieure, alors la somme est nulle, il faut donc bien penser à mettre les bornes dans le "bon sens".
- Seuls ces deux types de changement d'indices sont autorisés. On ne peut, en particulier, par faire de changement d'indice de la forme $j=2k$. Lorsqu'on est tenté de le faire, il faut plutôt penser à un découpage ou à un regroupement.

➪ **Exemple 4 :** Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 - \sum_{k=1}^{n} k^3 =$$

1.4 Sommes usuelles

Proposition 4

Soit $n\in\mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Proposition 5

Soit $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Preuve.

□

Remarque : Dans la preuve, on a utilisé la valeur donnée dans l'énoncé. La méthode pour trouver et prouver la valeur de la somme est basée sur la remarque suivante : on a $\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{j=0}^{n} (j+1)^3$, par changement d'indice en posant $j = k-1$. Ainsi, comme l'indice de sommation est muet :
$$\sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3.$$

Proposition 6 : Somme d'une progression géométrique

Soient $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $N_1 \leq N_2$. Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Alors :
$$\sum_{k=N_1}^{N_2} q^k = \frac{q^{N_1} - q^{N_2+1}}{1-q}.$$

Proposition 7

Soient $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $N_1 \leq N_2$. Alors :
$$\sum_{k=N_1}^{N_2} 1 = N_2 - N_1 + 1.$$
En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} 1 = n$ et $\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$.

1.5 Sommes télescopiques

Proposition 8 : Sommes télescopiques

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$ et $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels, on a : $\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) = a_{q+1} - a_p$.

Ce type de somme est appelé somme télescopique.

Remarque : On parle de somme télescopique car les termes s'éliminent deux à deux et il ne reste que le premier et le dernier terme :
$$\sum_{k=p}^{q} (a_{k+1} - a_k) = (\cancel{a_{p+1}} - a_p) + (\cancel{a_{p+2}} - \cancel{a_{p+1}}) + (\cancel{a_{p+3}} - \cancel{a_{p+2}}) + \ldots (\cancel{a_q} - \cancel{a_{q-1}}) + (a_{q+1} - \cancel{a_q}).$$
On peut adapter le résultat sur les sommes télescopiques à d'autres situations, par exemple :
$$\sum_{k=p}^{q} (a_{k-1} - a_k) =$$

Preuve.

$\square$

➪ **Exemple 5 :** On peut retrouver la formule donnant le terme général d'une suite arithmétique en utilisant une somme télescopique.
Soit $r \in \mathbb{R}$, soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.

1.6 Factorisation

Proposition 9 : Factorisation de $a^n - b^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

➪ **Exemple 6 :** $a^4 - b^4 =$

Preuve.

□

II Produits

Les résultats sur les produits sont analogues à ceux vus sur les sommes.

2.1 Définitions

Définition 3

Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels.
On définit par récurrence la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $P_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{n+1} = P_n.a_{n+1}$. On note alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$.

On note également, pour tout $N_1, N_2 \in \mathbb{N}^*$, tels que $N_1 \leq N_2$, et $P_{N_1-1} \neq 0$, $\dfrac{P_{N_2}}{P_{N_1-1}} = \prod_{k=N_1}^{N_2} a_k$.

Remarque : Pour les sommes, l'initialisation est 0, alors que pour les produits l'initialisation est 1.

Définition 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $I = \{i_k, k \in [\![1, n]\!]\}$ (les i_k sont 2 à 2 distincts) un ensemble fini à n éléments et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres réels indexée par I, on pose : $\prod_{i\in I} a_i = \prod_{k=1}^{n} a_{i_k}$.

Si $I = \emptyset$, on pose par convention $\prod_{i\in I} a_i = 1$.

➪ **Exemple 7 :** $\prod_{k=-1000}^{1000} k\ln(1+|k|) =$

2.2 Opérations sur les produits

Proposition 10

Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de nombres réels, soient $p, q \in \mathbb{N}$. On a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \prod_{k=1}^{n} (a_k^p.b_k^q) = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^p . \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^q.$$

Remarque : On peut donc "sortir" les puissances constantes d'un produit.

Corollaire 3

Soit I un ensemble fini, soient $(a_k)_{k\in I}$, $(b_k)_{k\in I}$ deux familles de nombres réels, soient $p, q \in \mathbb{N}$. On a :

$$\prod_{k\in I}(a_k^p.b_k^q) = \left(\prod_{k\in I} a_k\right)^p.\left(\prod_{k\in I} b_k\right)^q.$$

Proposition 11

Soient $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels, Soient $N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}^*$ tels que $N_1 \leq N_2 \leq N_3$. On a :

$$\prod_{k=N_1}^{N_3} a_k = \prod_{k=N_1}^{N_2} a_k.\prod_{k=N_2+1}^{N_3} a_k.$$

En particulier :

$$\prod_{k=N_1}^{N_3} a_k = a_{N_1}.\prod_{k=N_1+1}^{N_3} a_k.$$

$$\prod_{k=N_1}^{N_3} a_k = \left(\prod_{k=N_1}^{N_3-1} a_k\right).a_{N_3}.$$

Corollaire 4

Soit I un ensemble fini non vide. Si I est la réunion de deux sous-ensembles disjoints I_1 et I_2, alors :

$$\prod_{k\in I} a_k = \prod_{k\in I_1\cup I_2} a_k = \prod_{k\in I_1} a_k.\prod_{k\in I_2} a_k$$

2.3 Changement d'indice

Proposition 12

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une famille de nombres réels.

- Soit $d \in \mathbb{Z}$ tel que $p + d \geq 0$, on a :

  $$\prod_{k=p}^{q} a_k = \prod_{j=p+d}^{q+d} a_{j-d}.$$

  On dit qu'on a effectué le changement d'indice $j = k + d$.
- Soit $d \in \mathbb{N}$ tel que $d - q \geq 0$, on a :

  $$\prod_{k=p}^{q} a_k = \prod_{j=d-q}^{d-p} a_{d-j}.$$

  On dit qu'on a effectué le changement d'indice $j = d - k$.

2.4 Produits usuels

Définition 5

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n! = \prod_{k=1}^{n} k.$$

Remarque : Par convention, on a donc : $0! = 1$.

➪ **Exemple 8 :** Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{(n+1)!}{n!} =$$

Proposition 13

Soit $(N_1, N_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $N_1 \leq N_2$. Soit $a \in \mathbb{R}$, alors :

$$\prod_{k=N_1}^{N_2} a = a^{N_2-N_1+1}.$$

Remarque : On peut donc "sortir" les constantes multiplicatives d'un produit en les élevant à la puissance égale au nombre de termes du produit :

$$\prod_{k=N_1}^{N_2} (a.a_k) = a^{N_2-N_1+1} \prod_{k=N_1}^{N_2} a_k.$$

➪ **Exemple 9 :** Soit $n \in \mathbb{N}$,

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k) =$

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (2k+1) =$

2.5 Produits télescopiques

Proposition 14 : Produits télescopiques

Soient $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq q$ et $(a_k)_{k\in[\![p,q]\!]}$ une famille de nombres réels non nuls, on a : $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{q+1}}{a_p}$.

Ce type de produit est appelé produit télescopique.

➪ **Exemple 10 :** Soit $n \in \mathbb{N}$,

$\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}} =$

III Sommes doubles

Définition 6

Soient Ω une partie finie de $\mathbb{N}^2$ et $(a_{i,j})_{(i,j)\in\Omega}$ une famille de nombres réels doublement indexée.
On note $\displaystyle\sum_{(i,j)\in\Omega} a_{i,j}$ la somme des éléments de cette famille. On dit que cette somme est double.

Proposition 15

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ une famille de nombres réels. Alors :

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\right)$$

On pourra encore noter : $\displaystyle\sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}} a_{i,j}$.

Remarque : Il s'agit d'une somme rectangulaire. Dans ce cas, on peut intervertir les signes de sommation.

	$j=1$	$j=2$	$\cdots$	$j=p$	
$i=1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,p}$	$\sum\limits_{j=1}^{p} a_{1,j}$
$i=2$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,p}$	$\sum\limits_{j=1}^{p} a_{2,j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$i=n$	$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$\cdots$	$a_{n,p}$	$\sum\limits_{j=1}^{p} a_{n,j}$
	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,1}$	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,2}$	$\cdots$	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,p}$	$\sum\limits_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j}$

Proposition 16

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_{i,j})_{1\leq i\leq j\leq n}$ une famille de nombres réels.
Alors :

$$\sum_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$$

Remarque : Il s'agit d'une somme triangulaire. Dans ce cas, on peut intervertir les signes de sommation, mais en modifiant les bornes.

	$j=1$	$j=2$	$\cdots$	$j=n$	
$i=1$	$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$\cdots$	$a_{1,n}$	$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{1,j}$
$i=2$		$a_{2,2}$	$\cdots$	$a_{2,n}$	$\sum\limits_{j=2}^{n} a_{2,j}$
$\vdots$			$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$i=n$				$a_{n,n}$	$\sum\limits_{j=n}^{n} a_{n,j}$
	$\sum\limits_{i=1}^{1} a_{i,1}$	$\sum\limits_{i=1}^{2} a_{i,2}$	$\cdots$	$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{i,n}$	$\sum\limits_{1\leq i\leq j\leq n} a_{i,j}$

Pour se rappeler de la valeur des bornes, on écrit :

$$\begin{cases} 1\leq i\leq n \\ i\leq j\leq n \end{cases} \iff \begin{cases} 1\leq i\leq j \\ 1\leq j\leq n \end{cases}$$

➪ **Exemple 11 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=i}^{n} \dfrac{i}{j+1} =$

➪ **Exemple 12 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \min(i,j) =$$

IV Coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton

4.1 Coefficients binomiaux

Définition 7

Soient $k, n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\binom{n}{k}$ est appelé coefficient binomial et se lit « k parmi n ».

Proposition 17

Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$. On a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Preuve.

□

Proposition 18 : Triangle de Pascal

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n-1]\!]$. On a :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Remarque : Cette formule permet de calculer de proche en proche les coefficient binomiaux en construisant le triangle de Pascal.

	$p=0$	$p=1$	$p=2$	$p=3$	$\dots$	$p-1$	p
$n=0$	1						
$n=1$	1	1					
$n=2$	1	2	1				
$n=3$	1	3	3	1			
$n=4$	1	4	6	4	1		
$\vdots$	$\vdots$						
$n-1$	1					$\binom{n-1}{p-1}$	$\binom{n-1}{p}$
n	1						$\binom{n}{p}$

Preuve.

□

Corollaire 5

Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $k \leq n$. On a :

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N}.$$

Preuve.

□

4.2 Formule du binôme de Newton

Théorème 1 : Formule du binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

➪ **Exemple 13 :** $(a+b)^5 =$

Preuve.

□

Corollaire 6

- $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.
- $\forall n \in \mathbb{N}^* \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = 0$.

Preuve.

□

➪ **Exemple 14 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^{-k} =$

➪ **Exemple 15 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} \binom{i}{j} =$

➪ **Exemple 16 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Méthode 1 :

$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} =$

Méthode 2 :

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} =$

V Systèmes linéaires

5.1 Généralités

Définition 8

- On appelle **équation linéaire à p inconnues** une équation de la forme $a_1x_1+\cdots+a_px_p=b$, d'inconnues $x_1,\ldots,x_p\in\mathbb{R}$ et où $a_1,\ldots,a_p,b\in\mathbb{R}$.
- On appelle **système linéaire à n équations et p inconnues** tout système de la forme :

$$(\mathcal{S})\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1+\cdots+a_{1,p}x_p=b_1\\ a_{2,1}x_1+\cdots+a_{2,p}x_p=b_2\\ \qquad\qquad\vdots\\ a_{n,1}x_1+\cdots+a_{n,p}x_p=b_n \end{array}\right.$$

Pour tout $(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]$, les $x_j\in\mathbb{R}$ sont les **inconnues** du système, les $a_{i,j}\in\mathbb{R}$ sont les **coefficients** du système, et les b_i forment le **second membre** du système. On appelle **solution de** $(\mathcal{S})$ tout p-uplet $(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{R}^p$ vérifiant les n équations de $(\mathcal{S})$.

Définition 9

On appelle **opération élémentaire** sur les lignes d'un système l'une des trois opérations suivantes :

- multiplication d'une ligne L_i par un réel λ non nul ($\lambda\in\mathbb{R}^*$) ce que l'on note $L_i\leftarrow\lambda L_i$,
- échange des lignes L_i et L_j avec $i\neq j$ ce que l'on note $L_i\leftrightarrow L_j$,
- ajout de λL_j à L_i avec $i\neq j$ et $\lambda\in\mathbb{R}$ ce que l'on note $L_i\leftarrow L_i+\lambda L_j$.

Proposition 19

En effectuant des opérations élémentaires sur un système, on obtient un système équivalent, c'est-à-dire un système ayant le même ensemble de solutions.

Remarque : Les opérations élémentaires admettent toutes une opération réciproque, c'est pourquoi l'ensemble des solutions est conservé. L'opération réciproque de :

- $L_i\leftarrow\lambda L_i$ est $L_i\leftarrow\dfrac{1}{\lambda}L_i$,
- $L_i\leftrightarrow L_j$ est $L_i\leftrightarrow L_j$,
- $L_i\leftarrow L_i+\lambda L_j$ est $L_i\leftarrow L_i-\lambda L_j$.

Remarque : Dans les cas particuliers de systèmes linéaires à deux ou trois inconnues, l'ensemble des solutions s'interprète géométriquement comme une intersection de droites ou de plans. Ainsi, l'ensemble des solutions peut être :

- vide : pas de solution,
- réduit à un point : une solution unique,
- une droite : une infinité de solutions, avec un paramètre,
- un plan : une infinité de solutions, avec deux paramètres,
- l'espace entier : une infinité de solutions, avec trois paramètres.

5.2 Algorithme du pivot de Gauss

Le but de l'algorithme du pivot de Gauss est de faire des opérations élémentaires sur un système de façon à obtenir un système plus simple à résoudre. Les étapes sont les suivantes :

- on choisit une équation faisant apparaître la première inconnue,
- en effectuant un échange, on place cette équation sur la première ligne,
- on effectue des opérations de la forme $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ afin d'éliminer la première inconnue dans toutes les autres équations,
- on répète ces opérations en ne considérant plus ni la première ligne, ni la première inconnue.

L'objectif est d'obtenir, sur les premières lignes, un début de forme triangulaire et, éventuellement, sur les dernières lignes, des termes nuls.

➪ **Exemple 17 :** Résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 1 \\ 2x+y+z & = & 4 \\ x-3y+2z & = & 0 \end{array}\right.$$

➪ **Exemple 18 :** Résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+y+3z & = & 5 \\ x-y-z & = & 1 \\ x+z & = & 3 \end{array}\right.$$

➪ **Exemple 19 :** Soient $a, b \in \mathbb{R}$, résoudre le système d'inconnues $x, y \in \mathbb{R}$:

$$(S)\left\{\begin{array}{rcl} x+2y & = & 1 \\ ax+3y & = & b \end{array}\right.$$

➪ **Exemple 20 :** Soit $a \in \mathbb{R}$, résoudre le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$(S)\left\{\begin{array}{l} 2x+y-3z=a \\ 3x+2y+z=a+3 \\ 7x+4y-5z=2a+5 \end{array}\right.$$

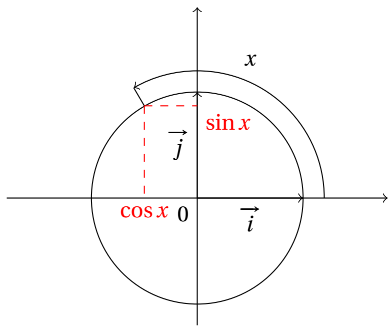
VI Cercle trigonométrique

6.1 Définition

Définition 10

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ un repère orthonormé direct. On note M le point du cercle trigonométrique (cercle de centre O et de rayon 1) tel que l'angle orienté $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM})$ a pour mesure x radians. On note alors $(\cos x, \sin x)$ les coordonnées de M dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

On appelle cosinus la fonction $\begin{array}{rccc} \cos : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos(x) \end{array}$ et sinus la fonction $\begin{array}{rccc} \sin : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$.



6.2 Formules de trigonométrie

Formule 1 : Quelques valeurs

$$\begin{array}{ccccc} \cos(0) = 1 & \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ \sin(0) = 0 & \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} & \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array}$$

Formule 2 : Cercle trigonométrique

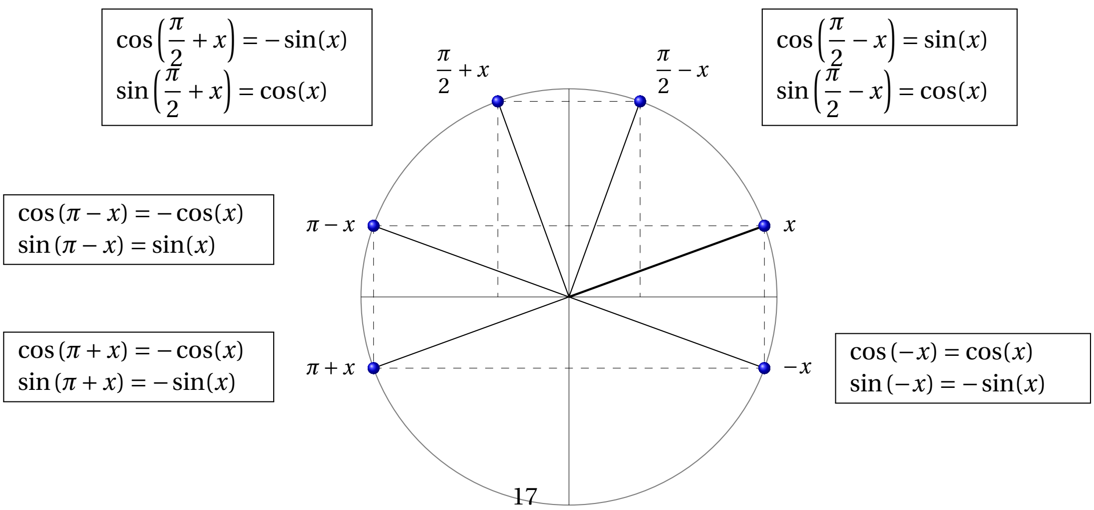
$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Formule 3 : Formules élémentaires

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ll} \cos(-x) = \cos(x) & \sin(-x) = -\sin(x) \\ \cos(\pi - x) = -\cos(x) & \sin(\pi - x) = \sin(x) \\ \cos(\pi + x) = -\cos(x) & \sin(\pi + x) = -\sin(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x) & \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x) \end{array}$$

Remarque : Ces formules doivent être visualisées sur le cercle trigonométrique.

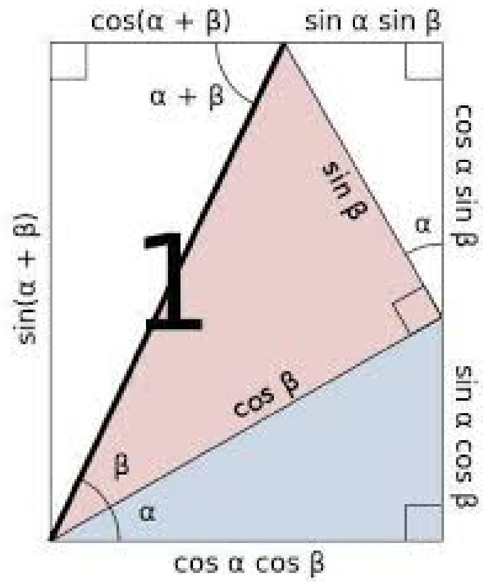


Formule 4 : Formules d'addition

Soient a, $b \in \mathbb{R}$,

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Justification géométrique des formules d'addition :



Remarque : Il faut savoir, à partir de ces formules, trouver rapidement les valeurs d'un produit de deux cosinus et/ou sinus.

➪ **Exemple 21 :**

$\cos(a)\cos(b) =$

$\cos(a)\sin(b) =$

Formule 5 : Formules de l'angle double

Soit $a \in \mathbb{R}$,

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 1 - 2\sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1$$
$$\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$$

➪ **Exemple 22 :** Soit $x \in \mathbb{R}$,

$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) =$

6.3 Congruences

Définition 11

Soit $a \in \mathbb{R}^*$, soient $x, y \in \mathbb{R}$.
On dit que x et y sont congrus modulo a et on note $x \equiv y \quad [a]$ ou $x \equiv y \mod a$ si et seulement si :

$$\exists k \in \mathbb{Z}, x = y + ka.$$

Proposition 20

Soient $a, b \in \mathbb{R}^*$, soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. On a :

$$(x \equiv y \quad [a] \text{ et } z \equiv t \quad [a]) \Longrightarrow x + z \equiv y + t \quad [a],$$

$$x \equiv y \quad [a] \Longrightarrow bx \equiv by \quad [ba].$$

VII Équations et inéquations trigonométriques

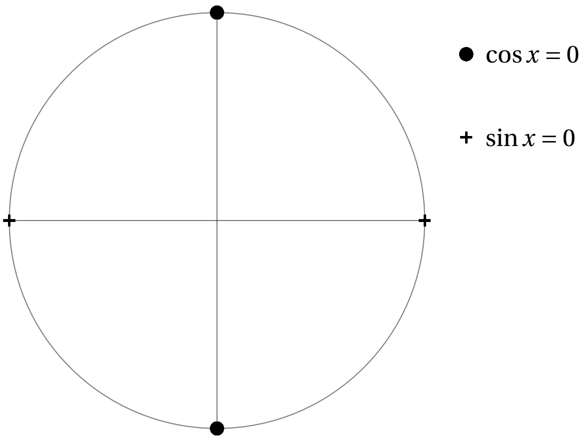
7.1 Équations trigonométriques

Proposition 21

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos x = 0 \iff x \equiv \frac{\pi}{2} \quad [\pi]$$

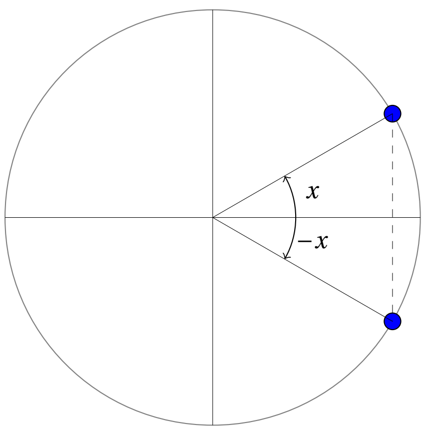
$$\sin x = 0 \iff x \equiv 0 \quad [\pi]$$



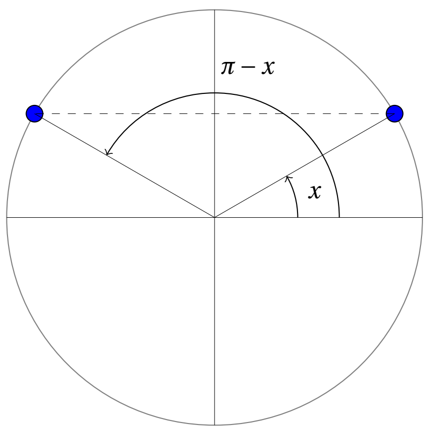
Proposition 22

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Alors,

- $\cos x = \cos y \iff \begin{cases} x \equiv y \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -y \quad [2\pi] \end{cases}$.
- $\sin x = \sin y \iff \begin{cases} x \equiv y \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - y \quad [2\pi] \end{cases}$.



$\cos x = \cos y$



$\sin x = \sin y$

➪ **Exemple 23 :** Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

➪ **Exemple 24 :** Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1.$$

➪ **Exemple 25 :** Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$4\sin x \cos x = 1.$$

7.2 Inéquations trigonométriques

Pour résoudre des inéquations trigonométriques, on utilise la lecture sur le cercle trigonométrique et la périodicité.

➪ **Exemple 26 :** Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

➪ **Exemple 27 :** Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x \geq 1.$$

VIII Fonctions cosinus et sinus

8.1 Propriétés globales

Proposition 23

Les fonctions cosinus et sinus sont 2π-périodiques :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x+2\pi) = \cos x \text{ et } \sin(x+2\pi) = \sin x.$$

Proposition 24

La fonction cosinus est paire et la fonction sinus est impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(-x) = \cos x \text{ et } \sin(-x) = -\sin x.$$

Remarque : Ces deux résultats se voient sur le cercle trigonométrique.

8.2 Dérivées et variations

Proposition 25

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Preuve.

□

Proposition 26

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$$

Preuve.

□

Proposition 27

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\sin' = \cos, \qquad \cos' = -\sin.$$

Preuve.

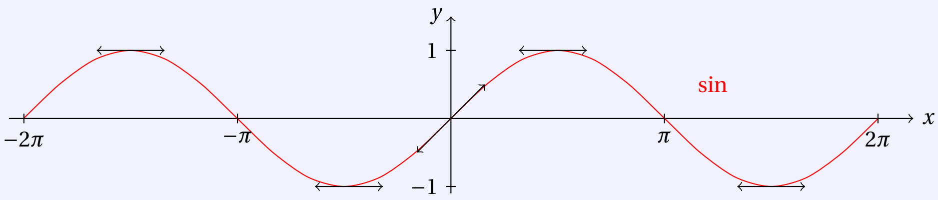
□

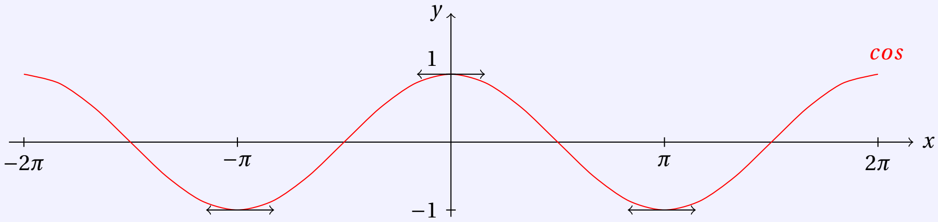
Proposition 28

Les variations sur $[0,\pi]$ des fonctions cosinus et sinus sont donnés par :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$(\sin)'(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$(\cos)'(x)$	0		$-$		0
$\cos$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1





Corollaire 7

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable. Alors $\cos\circ u$ et $\sin\circ u$ sont dérivables sur I et :

$$\forall x \in I,\ (\cos\circ u)'(x) = -u'(x).\sin(u(x)) \text{ et } (\sin\circ u)'(x) = u'(x).\cos(u(x)).$$

Proposition 29

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |\sin x| \leq |x|.$$

Preuve.

$\square$

IX Tangente

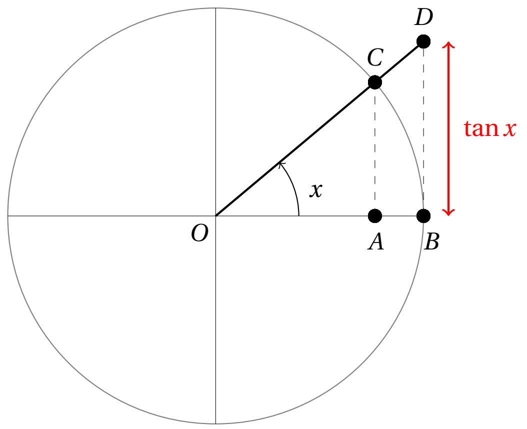
9.1 Définition

Définition 12

On appelle fonction tangente et on note tan, la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par : $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Remarque : Le domaine de définition exclu les points d'annulation du cosinus.

Illustration :



D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{BD}{OB} = \frac{AC}{OA}.$$

Ainsi :

$$\frac{BD}{1} = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

D'où :

$$BD = \tan x.$$

9.2 Formules de trigonométrie

Formule 6 : Quelques valeurs

$$\tan(0) = 0 \quad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$$

Formule 7 : Formules élémentaires

Soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t \not\equiv \frac{\pi}{2} \bmod \pi$,

$$\tan(-t) = -\tan(t) \quad \tan(\pi + t) = \tan(t) \quad \tan(\pi - t) = -\tan(t)$$

Formule 8 : Formules d'addition

Si $(a \not\equiv \frac{\pi}{2} \bmod \pi)$, $(b \not\equiv \frac{\pi}{2} \bmod \pi)$ et $(a + b \not\equiv \frac{\pi}{2} \bmod \pi)$, alors

$$\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Si $(a \not\equiv \frac{\pi}{2} \bmod \pi)$, $(b \not\equiv \frac{\pi}{2} \bmod \pi)$ et $(a - b \not\equiv \frac{\pi}{2} \bmod \pi)$, alors

$$\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Formule 9 : Formules de l'angle double

Si $(a \not\equiv \frac{\pi}{2} \bmod \pi)$ et $(a \not\equiv \frac{\pi}{4} \bmod \frac{\pi}{2})$

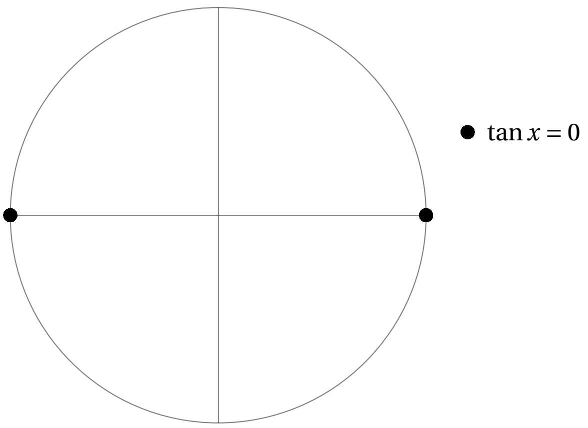
$$\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

9.3 Résolution d'équations trigonométriques

Proposition 30

Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

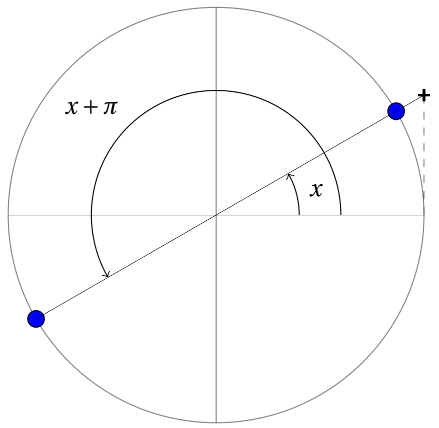
$$\tan x = 0 \iff x \equiv 0 \quad [\pi].$$



Proposition 31

Soient $x, y \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, on a :

$$\tan x = \tan y \iff x \equiv y \quad [\pi].$$



$\tan x = \tan y$

9.4 Fonction tangente

Proposition 32

La fonction tan est π-périodique et impaire :

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \tan(x + \pi) = \tan(x) \text{ et } \tan(-x) = -\tan x.$$

Proposition 33

La fonction tan est dérivable sur $\mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\forall x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}, \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x.$$

Preuve.

$\square$

Corollaire 8

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall x \in I,\ u(x) \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. Alors $\tan\circ u$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ (\tan\circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{\cos^2(u(x))} = u'(x)\left(1+\tan^2(u(x))\right).$$

Proposition 34

$$\lim_{x\to(\frac{\pi}{2})^-} \tan(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to(-\frac{\pi}{2})^+} \tan(x) = -\infty.$$

Preuve.

□

Proposition 35

Les variations sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction tangente sont données par :

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$(\tan)'(x)$	‖		$+$		‖
$\tan$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖