Chapitre 3 : Inégalités et fonctions d'une variable réelle

I Inégalités dans $\mathbb{R}$

1.1 Propriétés des inégalités

Les résultats qui suivent découlent de la construction de l'ensemble des nombres réels. Cette construction n'étant pas au programme, on admettra les résultats suivants. Il s'agit des propriétés basiques et bien connues des inégalités, mais elles sont écrites dans un langage formel.

Proposition 1

$\mathbb{R}$ est muni d'une relation de comparaison $\leq$ qui est dite relation d'ordre total, c'est à dire qu'elle possède les propriétés suivantes :

- réflexivité : $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq x$,
- antisymétrie : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \big(x \leq y \text{ et } y \leq x\big) \Longrightarrow x = y$,
- transitivité : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ \big(x \leq y \text{ et } y \leq z\big) \Longrightarrow x \leq z$.
- L'ordre est total c'est à dire que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ ou $y \leq x$.

Proposition 2

La relation $\leq$ est compatible avec :

- l'addition : $\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ x \leq y \Longrightarrow x + z \leq y + z$
- la multiplication par un réel positif : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \forall z \in \mathbb{R}^+,\ x \leq y \Longrightarrow xz \leq yz$.

Proposition 3 : Opérations sur les inégalités

Soient x, y, z, $t \in \mathbb{R}$.

- si $x \leq y$ et $z \leq t$, alors on a $x + z \leq y + t$.
- si $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq z \leq t$, alors on a $xz \leq yt$.
- si $x \leq y$, alors on a $-y \leq -x$.
- si $x \leq y$ et $z \leq 0$, alors on a $xz \geq yz$.
- si $0 < x \leq y$, alors on a $0 < \dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x}$.
- si $x \leq y < 0$, alors on a $\dfrac{1}{y} \leq \dfrac{1}{x} < 0$.

Remarque : Autrement dit : on peut additionner des inégalités, multiplier des inégalités entre des nombres positifs et passer aux quotient dans des inégalités entre des nombres de **même signe** en changeant le sens des inégalités.

Méthode 1

• Pour soustraire deux inégalités, on procède en deux étapes : on multiplie la bonne inégalité par -1 puis on ajoute les inégalités.
• Pour faire un produit d'inégalités, on se ramène au cas où les nombres sont tous positifs, quitte à multiplier par -1 en étape intermédiaire.
• Pour faire un quotient d'inégalités, on procède en deux étapes : on inverse la bonne inégalité (en faisant attention aux signes !) puis on multiplie les inégalités.

➪ **Exemple 1 :** Soient $a, b, c, d, e, f, x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a \leq x \leq b$, $d \leq y \leq c < 0$ et $0 < e \leq z \leq f$.

- Encadrement de $x - y$:

- Encadrement de xy :

- Encadrement de $\dfrac{x-y}{z}$:

➪ **Exemple 2 :** Résoudre l'inéquation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$(x+1)(x-1) > (x+1)^2.$$

1.2 Intervalles

Définition 1 : Intervalles de $\mathbb{R}$

On appelle intervalle de $\mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}$ ayant l'une des formes suivantes :

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R}\ ,\ a \leq x \leq b\}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$
(intervalle fermé et borné ou **segment**) ;
- $[a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}\ ,\ a \leq x\}$ avec $a \in \mathbb{R}$
(intervalle fermé non-majoré) ;
- $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R}\ \ x \leq b\}$ avec $b \in \mathbb{R}$
(intervalle fermé non-minoré) ;
- $]a,b[= \{x \in \mathbb{R}\ ,\ a < x < b\}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$
(intervalle borné ouvert) ;
- $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R}\ ,\ x < b\}$ avec $b \in \mathbb{R}$
(intervalle ouvert non-minoré) ;
- $]a,+\infty[= \{x \in \mathbb{R}\ \ a < x\}$ avec $a \in \mathbb{R}$
(intervalle ouvert non-majoré) ;
- $[a,b[= \{x \in \mathbb{R}\ ,\ a \leq x < b\}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$
(intervalle borné semi-ouvert à droite) ;
- $]a,b] = \{x \in \mathbb{R}\ ,\ a < x \leq b\}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$
(intervalle borné semi-ouvert à gauche) ;
- $\{a\}$ avec $a \in \mathbb{R}$
(intervalle réduit à un point ou **singleton**) ;
- l'ensemble vide $\emptyset$
- $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$
(intervalle non-majoré et non-minoré)

Remarque :

- Un intervalle est un ensemble qui est "en un seul morceau". La notion d'intervalle est une notion fondamentale pour les résultats de continuité.
- $\mathbb{R}^*$ n'est pas un intervalle.

1.3 Valeur absolue

Définition 2

On appelle valeur absolue de $x \in \mathbb{R}$ le réel, noté $|x|$ et défini par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarque :

- La valeur absolue est définie par une disjonction de cas. Dans une définition par disjonction de cas, il faut bien que les cas soient disjoints. On a donc choisi de mettre le cas $x = 0$ dans le cas positif mais on aurait pu faire le choix du cas négatif.
- On peut définir la valeur absolue sans disjonction de cas en utilisant le maximum (noté max) de deux nombres :

  $$\forall x \in \mathbb{R}, \ |x| = \max(x, -x).$$

  En effet :
  - si $x \geq 0$, alors $x \geq -x$ donc $\max(x, -x) = x = |x|$,
  - si $x < 0$, alors $-x \geq x$ donc $\max(x, -x) = -x = |x|$.

Proposition 4

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

- $|x| \geq 0$,
- $|x| = 0 \iff x = 0$,
- $|-x| = |x|$,
- $|x - y| = |y - x|$,
- $-|x| \leq x \leq |x|$,
- $|x| = |y| \iff x = \pm y$.

Proposition 5

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

- $|xy| = |x|.|y|$,
- $|x^n| = |x|^n$,
- si $y \neq 0$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

Preuve.

□

Proposition 6

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{x^2} = |x|.$$

Remarque : La relation $\sqrt{x^2} = x$, n'est vraie que pour $x \geq 0$.

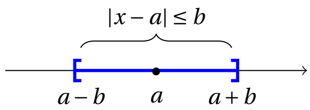
Proposition 7

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^+$, soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

- $|x-a| \leq b \iff -b \leq x-a \leq b \iff a-b \leq x \leq a+b$.
- $|x-a| \geq b \iff x-a \geq b$ ou $x-a \leq -b \iff x \leq a-b$ ou $x \geq a+b$.

Remarque :

- La valeur absolue d'un réel représente sa distance à 0. Si a et x sont deux réels, $|x-a|$ est la distance de a à x. Si $b \geq 0$, l'inégalité $|x-a| \leq b$ signifie que x est à une distance de a inférieure ou égale à b.



- Ces propriétés sont encore vraies en remplaçant les inégalités larges par des inégalités strictes.
- En particulier, dans le cas $a = 0$, on a : $|x| \leq b \iff -b \leq x \leq b$.

➪ **Exemple 3 :** Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :

$$|1-x| \leq 2|x| - 3.$$

➪ **Exemple 4 :** Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :

$$|(x-1)(x+2)| \leq 2.$$

Proposition 8 : Inégalités triangulaires

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

- $|x+y| \leq |x|+|y|$ (inégalité triangulaire) ;
- $||x|-|y|| \leq |x-y|$ (deuxième inégalité triangulaire).

Preuve.

□

Corollaire 1 : Généralisation de l'inégalité triangulaire

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. On a :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

➪ **Exemple 5 :** Montons que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k)}{k2^k}\right| \leq 1.$$

Proposition 9

Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

$$2|ab| \leq a^2 + b^2.$$

Preuve.

□

1.4 Parties majorées, minorées, bornées

Définition 3

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que :

- $M \in \mathbb{R}$ est un majorant de A ssi : $\forall x \in A,\ x \leq M$.
- $m \in \mathbb{R}$ un minorant de A ssi : $\forall x \in A,\ x \geq m$.
- A est majorée ssi A admet un majorant, c'est-à-dire :

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in A,\ x \leq M$$

- A est minorée ssi A admet un minorant, c'est-à-dire :

$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in A,\ x \geq m$$

- A est bornée ssi A est majorée et minorée, c'est-à-dire :

$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in A,\ m \leq x \leq M$$

Remarque : En cas d'existence, il n'y a pas d'unicité du majorant. Par exemple, les majorants de $A = [0,1[$ sont tous les éléments de $[1,+\infty[$.

Proposition 10

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. A est bornée ssi :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in A,\ |x| \leq M$$

Preuve.

□

Définition 4

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que :

- Soit $M \in \mathbb{R}$. On dit que M est le maximum de A ou le plus grand élément de A ssi :

$$M \in A \text{ et } \forall x \in A,\ x \leq M.$$

  Un tel élément est unique, et est noté $M = \max(A)$.
- Soit $m \in \mathbb{R}$. On dit que m est le minimum de A ou le plus petit élément de A ssi :

$$m \in A \text{ et } \forall x \in A,\ x \geq m.$$

  Un tel élément est unique, et est noté $m = \min(A)$.

Remarque :

- Une partie majorée n'admet pas toujours de maximum. Par exemple, $[0,1[$ est majorée mais n'admet pas de maximum.
- Une partie finie admet toujours un maximum et un minimum.

1.5 Partie entière

Définition 5

Soit $x \in \mathbb{R}$ On appelle partie entière de x, et on note $\lfloor x \rfloor$, le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x :

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z},\ n \leq x\}.$$

Proposition 11

Soit $x \in \mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{R}$.

$$n = \lfloor x \rfloor \quad \iff \quad n \in \mathbb{Z} \text{ et } n \leq x < n+1.$$

On a donc :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Preuve.

□

Proposition 12

Soit $x \in \mathbb{R}$,

- $x = \lfloor x \rfloor \iff x \in \mathbb{Z}$.
- $\forall n \in \mathbb{Z},\ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Preuve.

□

Proposition 13

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est croissante, c'est-à-dire :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\, x \leq y \Longrightarrow \lfloor x \rfloor \leq \lfloor y \rfloor.$$

Preuve.

□

➪ **Exemple 6 :** Montrer que :

$$\forall m, n \in \mathbb{Z},\ \left\lfloor \frac{n+m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-m+1}{2} \right\rfloor = n.$$

➪ **Exemple 7 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$. Montrer que :

$$\left\lfloor \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{n} x_i \right\rfloor \geq \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{x_i}{\alpha} \right\rfloor.$$

➪ **Exemple 8 :** Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\lfloor 3x-2 \rfloor = \lfloor x+1 \rfloor .$$

II Généralités sur les fonctions

2.1 Définition

Définition 6

Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.
On appelle fonction réelle définie sur $\mathcal{D}$ toute application f qui à chaque élément x de $\mathcal{D}$ associe un unique réel noté $f(x)$.
$\mathcal{D}$ est appelé ensemble de définition ou domaine de définition de f.
Soit $x \in \mathcal{D}$, on dit que $f(x)$ est l'image de x par f et que x est un antécédent de $f(x)$ par f.

Remarque : Il ne faut pas confondre f et $f(x)$: f est une fonction alors que $f(x)$ est un nombre.

2.2 Somme, produit

Définition 7

Soit $\mathcal{D}$une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soient $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On définit les fonctions :

$$\begin{array}{rccl} \lambda f + \mu g : & \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda f(x) + \mu g(x) \end{array} \qquad \begin{array}{rccl} f.g : & \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x).g(x) \end{array}$$

(combinaison linéaire de f et g) (produit de f et g)

Si de plus g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$, on définit la fonction :

$$\begin{array}{rccl} \dfrac{f}{g} : & \mathcal{D} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

(quotient de f par g)

Remarque :

- Dans $\lambda f + \mu g$, le signe + désigne une addition entre deux fonctions. Dans $\lambda f(x) + \mu g(x)$, le signe + désigne une addition entre deux nombres. Il y a donc deux significations pour le signe +.
  Cette définition est naturelle et son seul but est de définir les opérations classiques sur les fonctions.
- g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$ signifie que :
  $$\forall x \in \mathcal{D},\ g(x) \neq 0.$$
  Il ne faut pas confondre avec $g \neq 0$ qui signifie que g n'est pas la fonction constante nulle, c'est-à-dire :
  $$\exists x \in \mathcal{D},\ g(x) \neq 0.$$

➪ **Exemple 9 :** Soient $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+9 \end{array}$. Alors : $f+g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+x+10 \end{array}$ et $\dfrac{f}{g} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x+1}{x^2+9} \end{array}$.

2.3 Composée

Définition 8

Soient $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Soient $f : \mathcal{D}_1 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathcal{D}_1$, $f(x) \in \mathcal{D}_2$.
On appelle composée de f par g et on note $g \circ f$ la fonction :

$$g \circ f : \begin{array}{rcl} \mathcal{D}_1 & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Remarque : Comme g est définie sur $\mathcal{D}_2$, pour que $g(f(x))$ ait un sens, il faut avoir $f(x) \in \mathcal{D}_2$.

➪ **Exemple 10 :** Soient $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$ et $g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+9 \end{array}$.

Alors : $f \circ g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+10 \end{array}$ et $g \circ f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x+1)^2+9. \end{array}$

2.4 Représentation graphique

Définition 9

Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$, soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, la courbe représentative de f est l'ensemble des points de coordonnées :

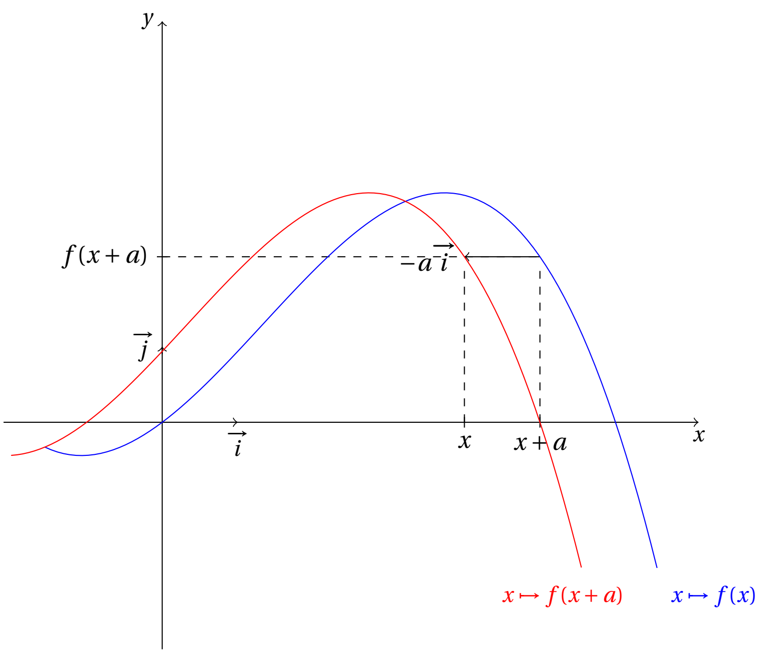
$$(x, f(x)),\ x \in \mathcal{D},$$

dans un repère du plan.

Proposition 14

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $a \in \mathbb{R}^*$.
La courbe représentative de la fonction :

- $x \mapsto f(x+a)$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par translation de vecteur $-a\vec{i}$
- $x \mapsto f(-x)$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
- $x \mapsto -f(x)$ se déduit de $\mathcal{C}_f$ par symétrie par rapport à l'axe des abscisses.



2.5 Parité, imparité

Définition 10

Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. On suppose ici que $\mathcal{D}$ est symétrique par rapport à 0, c'est à dire : $\forall x \in \mathcal{D},\ -x \in \mathcal{D}$.
On dit que f est :

- paire ssi :
$$\forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = f(x),$$
- impaire ssi :
$$\forall x \in \mathcal{D},\ f(-x) = -f(x).$$

Proposition 15

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Si f est paire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
On peut alors tracer $\mathcal{C}_f$ sur $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}^+$ et on obtiendra toute la courbe en effectuant la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
- Si f est impaire, alors $\mathcal{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.
On peut alors tracer $\mathcal{C}_f$ sur $\mathcal{D} \cap \mathbb{R}^+$ et on obtiendra toute la courbe en effectuant la symétrie par rapport à l'origine.

Remarque :

- Il ne faut pas confondre la parité des fonctions et celle des nombres entiers. C'est le contexte qui permet de savoir de quelle parité il s'agit.
- L'ensemble $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0, dans ce cas on peut donc "oublier" de vérifier que $\forall x \in \mathcal{D},\ -x \in \mathcal{D}$.
- Une fonction peut n'être ni paire, ni impaire. On ne peut donc pas faire de raisonnement par disjonction de cas.

➪ **Exemple 11 :** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$. f est paire en effet : soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(-x) = (-x)^2 + 1 = x^2 + 1 = f(x)$.

2.6 Périodicité

Définition 11

Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$.

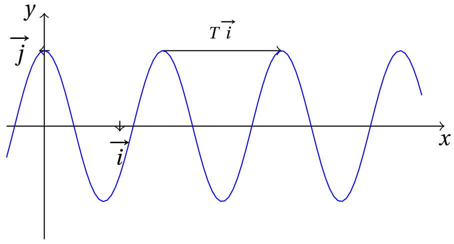
- Soit $T \in \mathbb{R}^*$. On dit que f est T-**périodique** ssi
$$\forall x \in \mathcal{D},\ x + T \in \mathcal{D} \text{ et } \forall x \in \mathcal{D},\ f(x+T) = f(x).$$
On dit alors que T est une période de f.
- f est dite périodique ssi existe $T \in \mathbb{R}^*$ tel que f soit T-périodique.

Proposition 16

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le repère du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Si f est T-périodique, avec $T \in \mathbb{R}^{+*}$, alors $\mathcal{C}_f$ est invariante par translations de vecteur $-T\vec{i}$
On peut alors tracer $\mathcal{C}_f$ sur $\mathcal{D} \cap J$, où J est un intervalle de longueur T, et on obtiendra toute la courbe en effectuant les translations de vecteurs $kT\vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque :

- Il n'y a pas unicité de la période. Par exemple, la fonction cosinus est 2π-périodique mais elle est également 4π-périodique.
- En général, il n'y a pas de notions de plus petite période. Par exemple, une fonction constante est T-périodique, pour tout $T \in \mathbb{R}^*$.
- Si f est T-périodique alors sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$. On se contente donc de l'étudier sur l'intersection de $\mathcal{D}$ avec un intervalle de longueur T puis on effectue des translations successives du tracé de $\mathcal{C}_f$ sur cette période.



Proposition 17

Soit $T \in \mathbb{R}^*$, soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que : $\forall x \in \mathcal{D},\ x+T \in \mathcal{D}$ et $x-T \in \mathcal{D}$, soit $f \in \mathcal{F}(\mathcal{D},\mathbb{R})$ une fonction T-périodique. On a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathcal{D},\ f(x+nT) = f(x).$$

Remarque : L'hypothèse $x - T \in \mathcal{D}$ permet d'avoir $n \in \mathbb{Z}$ et pas seulement $n \in \mathbb{N}$.

➪ **Exemple 12 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - n\lfloor \frac{x}{n} \rfloor \end{array}$. Montrer que f est périodique. En déduire que :

$$\forall x \in R, 0 \leq f(x) < n.$$

2.7 Monotonie

Définition 12

Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. On dit que f est :

- croissante ssi :
$$\forall x, y \in \mathcal{D},\ x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$
- décroissante ssi :
$$\forall x, y \in \mathcal{D},\ x \leq y \implies f(x) \geq f(y)$$
- strictement croissante ssi :
$$\forall x, y \in \mathcal{D},\ x < y \implies f(x) < f(y)$$
- strictement décroissante ssi :
$$\forall x, y \in \mathcal{D},\ x < y \implies f(x) > f(y)$$
- (strictement) monotone ssi elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Remarque :

- Dans la définition, on a uniquement des implications et pas des équivalences. On verra que l'implication réciproque est vraie dans le cas des fonctions strictement monotones. On peut prendre le cas des fonctions constantes pour voir que l'implication réciproque est fausse dans le cas des fonctions uniquement monotones.

- Une **fonction** est croissante (par exemple) et pas un nombre. On ne peut donc pas écrire x^3 est croissante sur $\mathbb{R}$. Par contre, on peut écrire :
  - La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$.
  - Posons $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 \end{array}$. La fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.
  - La fonction $x \mapsto x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

2.8 Fonctions majorées, minorées, bornées

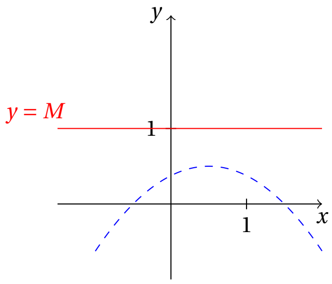
Définition 13

Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. On dit que f est :

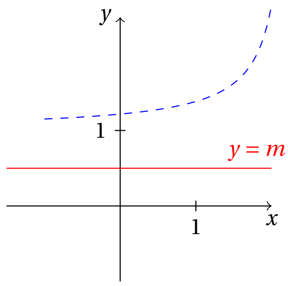
- majorée (sur $\mathcal{D}$) ssi :
$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, f(x) \leq M.$$
Un tel M est appelé majorant de f sur $\mathcal{D}$.
- minorée (sur $\mathcal{D}$) ssi :
$$\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, f(x) \geq m.$$
Un tel m est appelé minorant de f sur $\mathcal{D}$.
- bornée (sur $\mathcal{D}$) si f est majorée et minorée, c'est-à-dire :
$$\exists m, M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, m \leq f(x) \leq M.$$

Remarque :

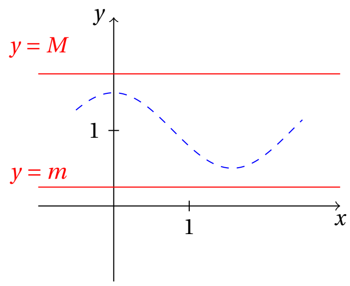
- L'ordre des quantificateurs est très important. Il faut bien placer le "$\exists M$" avant le "$\forall x$" afin que M ne dépende pas de x.
- Ces propriétés se traduisent géométriquement par des courbes représentatives qui sont en dessous ou au dessus de droites horizontales.



Fonction majorée



Fonction minorée



Fonction bornée

Proposition 18 : Caractérisation des fonctions bornées

Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. La fonction f est bornée ssi :
$$\exists M \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathcal{D}, |f(x)| \leq M.$$

Remarque : Ce résultat est analogue à celui vu sur les parties bornées. Il dit qu'une fonction f est bornée ssi $|f|$ est majorée.

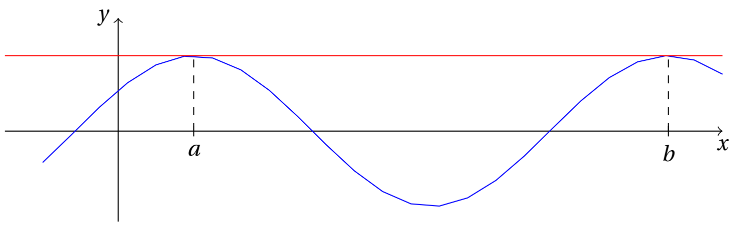
Définition 14

Soit $\mathcal{D}$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Soient $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathcal{D}$. On dit que :

- f admet un maximum en a ssi : $\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \leq f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé le maximum de f en a, on le note $\max\limits_{\mathcal{D}} f$ ou $\max\limits_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.
- f admet un minimum en a ssi : $\forall x \in \mathcal{D},\ f(x) \geq f(a)$. Le réel $f(a)$ est alors appelé le minimum de f en a, on le note $\min\limits_{\mathcal{D}} f$ ou $\min\limits_{x \in \mathcal{D}} f(x)$.

Remarque :

- Contrairement au majorant, le maximum est toujours atteint.
- Une fonction peut avoir ni maximum, ni minimum, ou bien encore le maximum s'il existe peut être atteint en plusieurs points.



La fonction admet un maximum aux points a et b.

III Bijectivité

3.1 Généralités

Définition 15 : Bijection

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \to B$.
On dit que f est bijective ou que f est une bijection ssi :

$$\forall y \in B,\ \exists! x \in A,\ y = f(x),$$

c'est-à-dire ssi tout élément de B admet un unique antécédent par f (dans A).

➪ **Exemple 13 :** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1. \end{array}$. Montons que f est bijective :

Définition 16 : Bijection réciproque

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \to B$ une bijection.
On appelle bijection réciproque de f et on note f^{-1} la fonction de B dans A qui, à tout élément de B, associe son unique antécédent par f (dans A).

➪ **Exemple 14 :** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$. f est bijective et on a : $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \end{array}$.

Proposition 19

Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ et $f : A \to B$ une bijection. Alors :

- $$\forall x \in A,\ f^{-1}(f(x)) = x$$
  $$\forall x \in B,\ f(f^{-1}(x)) = x$$
- $f^{-1} : B \to A$ est bijective et on a : $(f^{-1})^{-1} = f$.

➪ **Exemple 15 :** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$. f est bijective et on a : $f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x-1 \end{array}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

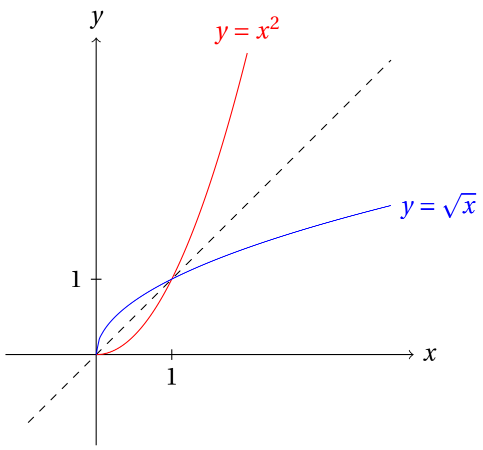
- $f^{-1}(f(x)) =$

- $f(f^{-1}(x)) =$

> **Proposition 20 : Graphe de la réciproque**
>
> Dans un repère orthonormé, les graphes d'une bijection f et de sa réciproque f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$ (première bissectrice).

Preuve.

□



Les courbes représentatives des fonctions $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

3.2 Cas des fonctions continue et strictement monotones

Commençons par rappeler le théorème des valeurs intermédiaires et ses conséquences qui nous seront utiles pour étudier la bijectivité.

> **Théorème 1 : Théorème des valeurs intermédiaires**
>
> Soit I un intervalle. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors, pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.

Remarque : Le théorème des valeurs intermédiaires est un théorème d'existence et pas d'unicité.

Proposition 21 : Généralisations du théorème des valeurs intermédiaires

- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite (finie ou infinie) en a et en b.
  Soit $y \in]\lim\limits_{x\to a} f(x), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$ ou $]\lim\limits_{x\to b} f(x), \lim\limits_{x\to a} f(x)[$, alors :
  $$\exists c \in]a,b[,\ f(c) = y.$$
- Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite (finie ou infinie) en a.
  Soit $y \in]\lim\limits_{x\to a} f(x), f(b)]$ ou $[f(b), \lim\limits_{x\to a} f(x)[$, alors :
  $$\exists c \in]a,b],\ f(c) = y.$$
- Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite (finie ou infinie) en b.
  Soit $y \in]\lim\limits_{x\to b} f(x), f(a)]$ ou $[f(a), \lim\limits_{x\to b} f(x)[$, alors :
  $$\exists c \in [a,b[,\ f(c) = y.$$

Corollaire 2 : Théorème de la bijection

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur I, soient $a, b \in I$ tels que $a < b$.
Soit y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, alors :
$$\exists! c \in [a,b],\ f(c) = y.$$

Proposition 22

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue.
- Si f est strictement croissante, alors f est bijective de $[a,b]$ vers $[f(a), f(b)]$.
- Si f est strictement décroissante, alors f est bijective de $[a,b]$ vers $[f(b), f(a)]$.

Proposition 23

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue.
- Si f est strictement croissante, alors f est bijective de $]a,b[$ vers $]\lim\limits_{a} f, \lim\limits_{b} f[$.
- Si f est strictement décroissante, alors f est bijective de $]a,b[$ vers $]\lim\limits_{b} f, \lim\limits_{a} f[$.

Méthode 2

En pratique, pour montrer qu'une fonction $f : I \to J$ est bijective :
- soit on utilise les propositions précédentes,
- soit, on montre que pour tout $y \in J$, l'équation $y = f(x)$ admet une unique solution $x \in I$ (x sera exprimé en fonction de y). Ceci nous permet d'obtenir une expression de la bijection réciproque : $f^{-1}(y) = x$.

➪ **Exemple 16 :** 1. Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \ln(x) + 2 \end{array}$. Montrons que f est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ vers un intervalle que l'on précisera.

2. Soit $\begin{array}{rccc} f: & [0,+\infty[& \to &]0,1] \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$. Montrons que f est bijective et déterminer f^{-1}.

Proposition 24

Soit $f : A \to B$ une fonction bijective et strictement monotone. Alors f^{-1} est strictement monotone de même sens que f.

Preuve.

□

Remarque : Soit $f : A \to B$ une fonction bijective et strictement croissante. Alors f^{-1} est strictement croissante donc :

$$\forall y_1, y_2 \in B,\ y_1 < y_2 \Longrightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2).$$

Soient $x_1, x_2 \in A$ tels que $f(x_1) < f(x_2)$, en appliquant la définition précédente à $f(x_1)$ et $f(x_2)$, on a : $f^{-1}(f(x_1)) < f^{-1}(f(x_2))$, c'est-à-dire $x_1 < x_2$. Ainsi :

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) < f(x_2) \Longrightarrow x_1 < x_2.$$

Donc l'implication réciproque de la définition d'une fonction strictement croissante est vraie.

3.3 Cas particulier : puissances et racines

Proposition 25

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, posons : $\begin{array}{rccc} f_n: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & x^n \end{array}$ si n est pair, $\begin{array}{rccc} f_n: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n \end{array}$ si n est impair.

Alors f_n est bijective et on note sa bijection réciproque :

$\begin{array}{rccc} f_n^{-1}: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & \sqrt[n]{x} = x^{1/n} \end{array}$ si n est pair, $\begin{array}{rccc} f_n^{-1}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt[n]{x} = x^{1/n} \end{array}$ si n est impair.

Remarque :

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ impair, soient $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$y = x^n \Longleftrightarrow x = \sqrt[n]{y}.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$ pair, soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^+$, on a :
$$y = x^n \Longleftrightarrow x = \pm \sqrt[n]{y}.$$

Preuve.

□

IV Dérivation

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

4.1 Définition

Définition 17

On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$ ssi le taux d'accroissement $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie quand x tend vers a. On appelle alors dérivée de f en a et on note $f'(a)$ cette limite :
$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$
On dit que f est dérivable sur I ssi f est dérivable en tout point de I, et on définit la fonction dérivée de f, notée f', par :
$$f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}.$$

Remarque : On a :
$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \text{ et } \lim_{h\to 0}(a+h) = a.$$
Ainsi, par composition des limites :
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a).$$

Proposition 26

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$, alors le graphe de f admet une tangente au point $(a, f(a))$, d'équation :
$$y = f(a) + f'(a)(x-a).$$

4.2 Premières dérivées usuelles

Formule 1

Fonction $f : x \mapsto$	Dérivée $f' : x \mapsto$	Ensemble de validité
x^n, $n \in \mathbb{N}^*$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$

4.3 Opérations sur les dérivées

Proposition 27 : Opérations sur les fonctions dérivables

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $f+g$, (λf), fg sont dérivables sur I et si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I avec

$$(f+g)' = f' + g' \qquad (\lambda f)' = \lambda f' \qquad (fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Proposition 28 : Dérivée d'une fonction composée

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ non vides et non réduits à un point.
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur J telles que pour tout $x \in I$, $f(x) \in J$. Alors $g \circ f$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ (g \circ f)'(x) = f'(x).g'\left(f(x)\right).$$

Remarque : Cette proposition est le résultat général de composition. Il permet de retrouver les cas particuliers classiques.

- Soit u une fonction dérivable à valeurs dans $\mathbb{R}$, soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors u^n est dérivable et :

$$(u^n)' = nu'.u^{n-1}.$$

  On a appliqué la proposition précédente à : $g : x \mapsto x^n$ et $f = u$.
- Soit u une fonction dérivable à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$, alors $\sqrt{u}$ est dérivable et :

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}.$$

  On a appliqué la proposition précédente à : $g : x \mapsto \sqrt{x}$ et $f = u$.
- Soit u une fonction dérivable à valeurs dans $\mathbb{R}^*$, alors $\dfrac{1}{u}$ est dérivable et :

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

  On a appliqué la proposition précédente à : $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ et $f = u$.
- Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, soient $a, b \in \mathbb{R}$. La dérivée de $h : x \mapsto g(ax+b)$ est :

$$h' : x \mapsto ag'(ax+b).$$

  On a appliqué la proposition précédente à : $f : x \mapsto ax+b$.

➪ **Exemple 17 :** Posons $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{x^2}{x^2+1}}$.

- f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ en effet :

- Calculons la dérivée de f.

4.4 Dérivées d'ordre supérieur

Définition 18

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

- On pose $f^{(0)} = f$.
- Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose que la fonction $f^{(k)} : I \to \mathbb{R}$ existe et qu'elle est dérivable sur I. On note alors $f^{(k+1)}$ la fonction dérivée de $f^{(k)}$, c'est à dire : $f^{(k+1)} = (f^{(k)})'$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, si la fonction $f^{(n)} : I \to \mathbb{R}$ existe, on dit alors f est n fois dérivable sur I et la fonction $f^{(n)}$ est appelée dérivée n-ième de f sur I.
On dit que f est indéfiniment dérivable sur I si f est n-fois dérivable sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque :

- Cette définition permet de ne par écrire trop de symboles "prime". On a :

$$f^{(1)} = f', f^{(2)} = f'', f^{(3)} = f''', f^{(4)} = f'''', \ldots$$

- Il ne faut pas confondre f^n qui désigne la puissance n et $f^{(n)}$ qui désigne la dérivée n-ième.

➪ **Exemple 18 :** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Calculons $f^{(n)}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Définition 19

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I ssi f est n-fois dérivable sur I, et $f^{(n)}$ est continue sur I.
  On note $\mathcal{C}^n(I)$ ou $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^n$.
- On dit que $f : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ssi pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
  On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ ou $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Remarque : En particulier, une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est une fonction dérivable dont la dérivée est continue.

4.5 Lien avec la continuité

Proposition 29

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, alors elle est continue sur I.

Remarque :

- La réciproque est fausse : la fonction racine carrée est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.
- Si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est dérivable et donc est continue.

4.6 Tableau de variations

Proposition 30 : Signe de la dérivée et variations

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

- f est constante ssi $f' = 0$.
- f est croissante ssi $f' \geq 0$.
- f est décroissante ssi $f' \leq 0$.
- Si $f' \geq 0$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante.
- Si $f' \leq 0$ et ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante.

Remarque :

- L'hypothèse d'intervalle est fondamentale ici. Par exemple, si $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \, f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$
Cependant f n'est pas strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$. Par contre f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ qui sont des intervalles.
- Les résultats sur la monotonie sont des équivalences mais ceux sur la stricte monotonie ne sont que des implications.
- Dans le cas de la stricte monotonie, la dérivée peut s'annuler en un nombre fini de points. Par exemple, posons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \, f'(x) = 3x^2.$$
On a donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \, f'(x) > 0 \text{ et } f'(0) = 0.$$
On peut donc conclure que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I.

- Si $f' > 0$ alors f est strictement croissante.
- Si $f' < 0$ alors f est strictement décroissante.

➪ **Exemple 19 :** Soit $p \in]0,1[$.

- Montrons que : $\forall t \in \mathbb{R}^+$, $(1+t)^p \leq 1 + t^p$.

- Montrons que : $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, $(x+y)^p \leq x^p + y^p$.

4.7 Bijection réciproque

Proposition 31

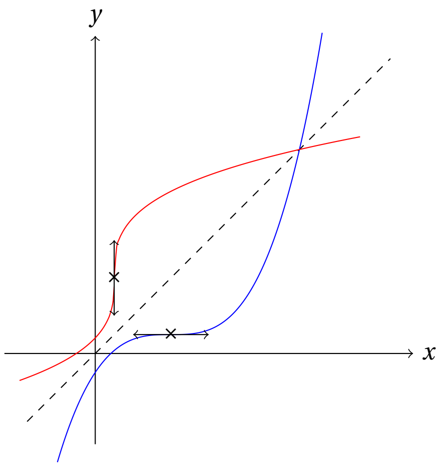
Soit $f : I \to J$ une bijection dérivable sur I. Alors :

$$f^{-1} : J \to I \text{ est dérivable sur } J \text{ si et seulement si } f' \text{ ne s'annule pas sur } I$$

et dans ce cas :

$$\forall y \in J,\ (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Remarque : L'annulation de la dérivée de f correspond à l'existence d'une tangente horizontale. Pour f^{-1}, cette tangente devient verticale, c'est pourquoi il y a un problème de non dérivabilité.



➪ **Exemple 20 :** • On pose : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 + x. \end{array}$

Étudions la bijectivité de f et la dérivabilité de f^{-1} :

- On pose : $f : \begin{array}{ccc} [1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x}{x}. \end{array}$

Étudions la bijectivité de f et la dérivabilité de f^{-1} :

Proposition 32

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $h_n : x \mapsto \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ est dérivable sur $A = \mathbb{R}^{+*}$ si n est pair et sur $A = \mathbb{R}^*$ si n est impair et on a :

$$\forall x \in A,\ h_n'(x) = \frac{1}{n} x^{(1/n)-1}$$

Preuve.

□