

Chapitre 4 : Nombres complexes

I Ensemble des nombres complexes

1.1 Partie réelle et partie imaginaire

La construction de l'ensemble des nombres complexes n'est pas exigible. On admettra donc le résultat suivant :

Définition-Proposition 1

Il existe un ensemble noté \mathbb{C} :

- possédant un élément noté i tel que $i^2 = -1$,
- dont tout élément s'écrit de manière unique sous la forme $z = x + iy$ avec x et y réels,
- muni d'une addition notée $+$ telle que : si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, on définit $z + z'$:

$$z + z' = (x + x') + i(y + y')$$

- muni d'une multiplication notée \times ou \cdot telle que : si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, on définit $z \times z'$ par :

$$z \times z' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$$

Remarque :

- Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $x = x + i0$ et comme $x, 0 \in \mathbb{R}$, on a donc $x \in \mathbb{C}$. On a donc l'inclusion :

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

- Les nombres réels sont donc des nombres complexes. Dire qu'un nombre est complexe ne signifie donc pas qu'il ne soit pas réel.

- Les opérations définies sur les nombres complexes vérifient les règles connues pour les nombres réelles : si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ avec $x, y, x', y' \in \mathbb{R}$, on a :

$$z + z' = x + iy + x' + iy' = (x + x') + i(y + y'),$$

$$z \times z' = (x + iy)(x' + iy') = xx' + ix'y' + iyx' + i^2yy' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

⇔ **Exemple 1 :** Posons $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 3i$ et $z_3 = 4 - i$, on a :

$$(z_1 + z_2)z_3 = \dots$$

Définition 1

On appelle nombre imaginaire pur, tout nombre complexe de la forme iy avec $y \in \mathbb{R}$.

On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.

Remarque : Les nombres réels sont les complexes de partie imaginaire nulle et les nombres imaginaires purs sont les complexes de partie réelle nulle.

Définition 2

Soit $z \in \mathbb{C}$, il existe une unique couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$. Cette écriture est appelée **écriture algébrique** ou **forme algébrique**.

De plus x est appelé **partie réelle** de z et notée $\operatorname{Re}(z)$, y est appelée **partie imaginaire** de z et notée $\operatorname{Im}(z)$.

Proposition 1

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. On a :

$$\operatorname{Re}(z_1 + z_2) = \operatorname{Re}(z_1) + \operatorname{Re}(z_2) \text{ et } \operatorname{Im}(z_1 + z_2) = \operatorname{Im}(z_1) + \operatorname{Im}(z_2).$$

Corollaire 1

Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, on a :

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^n z_k\right) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(z_k) \text{ et } \operatorname{Im}\left(\sum_{k=1}^n z_k\right) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(z_k).$$

Proposition 2

Soit $z \in \mathbb{C}$, soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\operatorname{Re}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Re}(z) \text{ et } \operatorname{Im}(\lambda z) = \lambda \operatorname{Im}(z).$$

Remarque : On peut "sortir" les nombres **réels** des parties réelles et imaginaires.

⇔ **Exemple 2 :** Posons $z_1 = -1 + 3i$ et $z_2 = 4 - i$. On cherche la partie réelle et la partie imaginaire de $z_1^2 - 2z_2$.

1.2 Conjugaison

Définition 3

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **conjugué** de z , et on note \bar{z} le nombre complexe $\bar{z} = a - ib$.

Proposition 3

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

- $\overline{\bar{z}} = z$.
- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
- $\overline{z_1 \times z_2} = \bar{z}_1 \times \bar{z}_2$.
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{z^n} = \bar{z}^n$.
- si $z_2 \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$.

Preuve.

□

⇔ **Exemple 3:** Posons $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 + 3i$ et $z_3 = 4 + i$.
 $z_1^2 - 3z_2 + iz_3 =$

Proposition 4

Soit $z \in \mathbb{C}$, on a :

- $\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- $\operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- $z \in \mathbb{R}$ si et seulement si $\bar{z} = z$
- $z \in i\mathbb{R}$ si et seulement si $\bar{z} = -z$

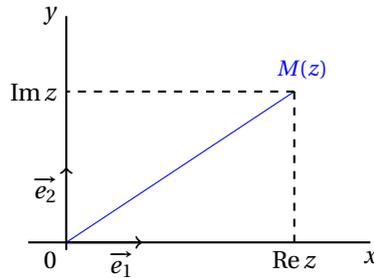
Preuve.

□

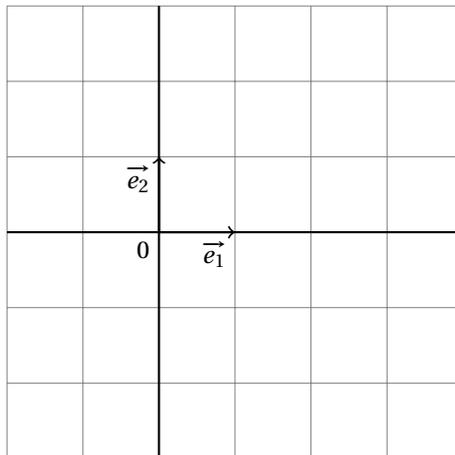
1.3 Affixe

Définition 4

On munit le plan usuel \mathcal{P} d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.
 A tout point M de \mathcal{P} de coordonnées (x, y) (resp. à tout vecteur \vec{u} tel que $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$) avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$ et réciproquement. On dit que z est l'**affixe** de M (resp. \vec{u}) et M (resp. \vec{u}) est appelé image de z . On note $M(z)$ (resp. $(\vec{u}(z))$) pour exprimer que z est l'affixe de M (resp. \vec{u}).



⇔ **Exemple 4 :** On pose $z_1 = 2i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = -1 - 2i$ et $z_4 = 3$. Soit \vec{u}_1 (resp. $\vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4$) le vecteur d'affixe z_1 (resp. $z_2, z_3, z_4, \bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3, \bar{z}_4$). On a :



Remarque : L'axe des abscisses correspond aux nombres réels et l'axe des ordonnées aux nombres imaginaires purs.

Remarque : Comme le point de coordonnées $(x, -y)$ est le symétrique du point de coordonnées (x, y) par rapport à l'axe des abscisses, la conjugaison s'interprète comme la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

1.4 Calcul algébrique

Les formules suivantes, vues dans \mathbb{R} restent vraies dans \mathbb{C} .

Proposition 5 : Somme d'une progression géométrique

Soient $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tels que $N_1 \leq N_2$. Soit $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Alors :

$$\sum_{k=N_1}^{N_2} q^k = \frac{q^{N_1} - q^{N_2+1}}{1 - q}.$$

Proposition 6 : Factorisation de $a^n - b^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a^n - b^n = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k} = (a - b) \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k.$$

Théorème 1 : Formule du binôme de Newton

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

II Module

2.1 Définition et opérations

Définition 5

On appelle module du nombre complexe $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et on note $|z|$ le réel positif (ou nul) défini par

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Remarque : La notion de module prolonge celle de valeur absolue, c'est à dire que le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue. En effet, si $x \in \mathbb{R}$, alors $x = x + i0$ et le module de x vaut $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2}$ qui est égal à la valeur absolue de x .

Interprétation géométrique du module :

Soit $z \in \mathbb{C}$.

Si M est le point du plan \mathcal{P} d'affixe z alors $|z| = \|\overrightarrow{OM}\| = OM$.

De même, si \vec{u} est le vecteur du plan d'affixe z alors $|z| = \|\vec{u}\|$

Si A et B sont deux points du plan d'affixes a et b alors $|b - a| = \|\overrightarrow{AB}\| = AB$.

Cercles et disques :

Soient $\omega \in \mathbb{C}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$.

- L'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant $|z - \omega| = r$ est le cercle de centre Ω d'affixe ω et de rayon r .
- L'ensemble des points du plan d'affixe z vérifiant $|z - \omega| < r$ (resp. $|z - \omega| \leq r$) est le disque ouvert (resp. fermé) de centre Ω d'affixe ω et de rayon r .

Le disque ouvert ne contient pas les points du cercle contrairement au disque fermé.

Proposition 7

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $|z|^2 = z\bar{z}$ et $|z| = |\bar{z}|$.

Preuve.

□

Méthode 1 : Calcul de la forme algébrique d'un quotient

On cherche à déterminer la forme algébrique du quotient $\frac{z_1}{z_2}$, avec $z_1 \in \mathbb{C}$ et $z_2 \in \mathbb{C}^*$.

On multiplie et on divise la fraction par la quantité conjuguée du dénominateur :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

Comme $|z_2|^2$ est réel, il suffit de développer le numérateur pour obtenir la forme algébrique.

⇨ **Exemple 5 :** Posons $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 2 + 3i$, on cherche la forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$:

Proposition 8

Soient $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

- $|z_1 z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z|^n = |z^n|$
- si $z_2 \neq 0$, $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Preuve.

□

⇔ **Exemple 6 :** Posons $z_1 = \sqrt{3} + i$. On calcule le module de z_1^3 :

$$|z_1^3| =$$

2.2 Propriétés

Proposition 9

$$\forall z \in \mathbb{C}, (|z| = 0 \iff z = 0).$$

Proposition 10

$$\forall z \in \mathbb{C}, |\operatorname{Re}(z)| \leq |z| \text{ et } |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|.$$

Illustration :

Preuve.

2.3 Inégalité triangulaire

Proposition 11 : Inégalité triangulaire

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

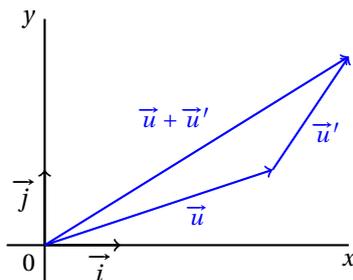
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|,$$

de plus $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si et seulement si $z_1 = 0$ ou s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^+$ tel que $z_2 = \lambda z_1$.

Interprétation géométrique :

L'inégalité triangulaire peut donc s'interpréter de la manière suivante : si z et z' représentent les affixes de deux vecteurs \vec{u} et \vec{u}' alors : $\|\vec{u} + \vec{u}'\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{u}'\|$.

Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire correspond au cas où les vecteurs \vec{u} et \vec{u}' sont colinéaires de même sens.



Preuve.

Corollaire 2

Soient $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, on a :

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

Corollaire 3 : Deuxième inégalité triangulaire

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$,

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 - z_2|.$$

Preuve.

□

⇔ **Exemple 7 :** Montrer que :

$$\forall a, b, c \in \mathbb{C}, |1+a| + |a+b| + |b+c| + |c| \geq 1.$$

⇔ **Exemple 8 :** Montrer que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \neq 1$:

$$\left| \frac{1-z^{n+1}}{1-z} \right| \leq \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}.$$

III Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

3.1 Cercle trigonométrique

Définition 6

On note \mathbb{U} l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}.$$

Remarque : \mathbb{U} est représenté par le cercle trigonométrique.

Proposition 12

- $\forall z, z' \in \mathbb{U}, z \cdot z' \in \mathbb{U}$
- $\forall z \in \mathbb{U}, z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \bar{z} \in \mathbb{U}$
- $\forall z \in \mathbb{U}, z \neq 0$
- $\forall z \in \mathbb{U}, \frac{1}{z} \in \mathbb{U}$ et $\frac{1}{z} = \bar{z}$.

Remarque : Si $z, z' \in \mathbb{U}$, en général, $z + z' \notin \mathbb{U}$. Par exemple : $z = 1 \in \mathbb{U}$, $z' = i \in \mathbb{U}$ et $z + z' = 1 + i \notin \mathbb{U}$.

Proposition 13 : Paramétrisation de \mathbb{U} par les fonctions circulaires

Un nombre complexe z est de module 1 si et seulement si il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{Re}(z) = \cos(\theta)$ et $\operatorname{Im}(z) = \sin(\theta)$.
Ainsi :

$$\mathbb{U} = \{\cos(\theta) + i \sin(\theta), \theta \in \mathbb{R}\} = \{z \in \mathbb{C}, \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)\}.$$

Preuve.

□

3.2 Exponentielle d'un nombre imaginaire pur

Définition 7

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On note $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$

Proposition 14

L'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, \theta \mapsto e^{i\theta}$ est 2π -périodique, c'est-à-dire :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{i(\theta+2\pi)} = e^{i\theta}.$$

Proposition 15

Soit $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{i\theta} e^{i\varphi} = e^{i(\theta+\varphi)}$$

Preuve.

□

Corollaire 4

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$$

Preuve.

□

3.3 Egalités d'exponentielles de nombres imaginaires purs

Proposition 16

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{i\theta} = 1 \iff \theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

Preuve.

□

Corollaire 5

Soient $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$, on a :

$$e^{i\theta} = e^{i\varphi} \iff \theta \equiv \varphi \pmod{2\pi}$$

Preuve.

□

⇨ **Exemple 9 :** On veut résoudre l'équation, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$e^{2ix} = i \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

3.4 Formules d'Euler et de Moivre

Proposition 17 : Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Preuve.

□

Proposition 18 : Formule de Moivre

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$ ou encore par définition de $e^{i\theta}$:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

Preuve.

□

3.5 Factorisation par l'angle moitié

Méthode 2 : Factorisation par l'angle moitié

Lorsque l'on a une expression de la forme $e^{ia} \pm e^{ib}$, on met en facteur $e^{i\frac{a+b}{2}}$ puis on utilise la formule d'Euler. Cela est en particulier utile pour :

- simplifier des puissances
- déterminer les formules de factorisation de $\cos(a) \pm \cos(b)$ ou $\sin(a) \pm \sin(b)$ en prenant la partie réelle ou la partie imaginaire.

L'expression la plus fréquente est : $1 \pm e^{it}$.

⇨ **Exemple 10 :** Soient $t, a, b \in \mathbb{R}$. On a :

- $1 + e^{it} =$

- $1 - e^{it} =$

- $\cos(a) + \cos(b) =$

- $\sin(a) - \sin(b) =$

⇨ **Exemple 11 :** Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $t \in \mathbb{R}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^n \cos(kt) \text{ et } \sum_{k=0}^n \sin(kt).$$

3.6 Applications des formules de Moivre et d'Euler

Méthode 3 : Linéarisation

Pour linéariser une expression trigonométrique de la forme $\cos^k x \sin^l x$ (en combinaison linéaire de termes en $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$), on procède comme suit :

1. On utilise les formules d'Euler pour exprimer $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de e^{ix} et e^{-ix} .
2. On développe complètement les puissances.
3. On regroupe les termes deux à deux conjugués pour reconnaître des $\cos(\alpha x)$ ou $\sin(\beta x)$.

⇨ **Exemple 12 :** Soit $x \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3(x) \sin^2(x)$.

Remarque : La linéarisation permet de calculer des primitive de fonctions de la forme $x \mapsto \cos^k x \sin^l x$.

Méthode 4

Pour transformer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en un polynôme en \cos (ou en \sin), on procède comme suit :

1. On écrit $\cos(nx) = \operatorname{Re}(e^{inx}) = \operatorname{Re}((e^{ix})^n) = \operatorname{Re}((\cos x + i \sin x)^n)$ grâce à la formule de Moivre.
2. On développe la puissance.
3. On ne garde que la partie réelle (ou imaginaire dans le cas d'un sinus).

⇨ **Exemple 13 :** Soit $x \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(4x)$ en fonction de $\cos x$.

⇨ **Exemple 14 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x, y \in \mathbb{R}$. Calculer la somme suivante :

$$S = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(x + ky).$$

IV Argument d'un nombre complexe non nul

4.1 Définitions

Proposition 19

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On a : $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ et il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que :

$$z = |z|e^{i\theta}.$$

Définition 8 : Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$.

L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée **forme trigonométrique** ou **forme exponentielle**.

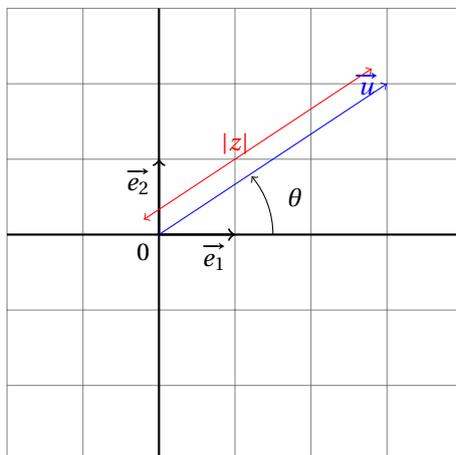
On dit que le réel θ est un argument de z .

Interprétation géométrique de l'argument :

Soit $z \in \mathbb{C}^*$ et θ un argument de z .

Si M a pour affixe z , alors, θ représente une mesure de l'angle orienté (\vec{e}_1, \vec{OM}) .

Si \vec{u} a pour affixe z , alors, θ représente une mesure de l'angle orienté (\vec{e}_1, \vec{u}) .



Remarque : Même si θ est l'argument principal de z , cette méthode ne donne pas directement l'argument principal de z^n .

⇨ **Exemple 16 :**

- $(1 + i)^{1000} =$

- $(-1 - i\sqrt{3})^{500} :$

⇨ **Exemple 17 :** Soit $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les dérivées n -ièmes de \cos et \sin .

4.2 Opérations sur les arguments

Proposition 22

Soient $z_1 \in \mathbb{C}^*$ et $z_2 \in \mathbb{C}^*$ d'arguments respectifs θ_1 et θ_2 . Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors

- $\overline{z_1}$ est non nul et $-\theta_1$ est un argument de $\overline{z_1}$.
- $z_1 z_2$ est non nul et $\theta_1 + \theta_2$ est un argument de $z_1 z_2$.
- $\frac{1}{z_2}$ est non nul et $-\theta_2$ est un argument de $\frac{1}{z_2}$.
- $\frac{z_1}{z_2}$ est non nul et $\theta_1 - \theta_2$ est un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.
- z_1^n est non nul et $n\theta_1$ est un argument de z_1^n .
- $-z_1$ est non nul et $\theta_1 + \pi$ est un argument de $-z_1$.

Preuve.

□

4.3 Amplitude et phase

Méthode 7 : Amplitude et phase

On veut transformer une expression de la forme $a \cos t + b \sin t$, $(a, b) \neq (0, 0)$ en $A \cos(t - \varphi)$ où A désigne l'amplitude et φ la phase.

- On pose $z = a + ib$, comme $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que : $z = |z|e^{i\varphi}$. Donc :

$$a = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\varphi) \text{ et } b = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(\varphi).$$

- On a alors :

$$a \cos t + b \sin t = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \varphi \cos t + \sin \varphi \sin t) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(t - \varphi).$$

Donc $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ convient.

V Équations algébriques

5.1 Rappels

Proposition 23 : Résolution de l'équation du second degré à coefficients réels

Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ à coefficients $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$.
On appelle discriminant de l'équation, le nombre réel $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $z_0 = -\frac{b}{2a}$, appelée racine double et

$$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2.$$

- Si $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions réelles distinctes, $z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et

$$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

- Si $\Delta < 0$, l'équation admet deux solutions non réelles distinctes, $z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et

$$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

5.2 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition 10

On appelle racine carrée d'un nombre complexe z tout nombre complexe u vérifiant $u^2 = z$.

Remarque :

- Si $z \neq 0$, z admet deux racines carrées opposées.
- Dans \mathbb{R}^+ , les racines carrées sont réelles, on choisit d'appeler **la** racine carrée et de noter avec le symbole $\sqrt{\quad}$ celle qui est positive. Mais, en dehors de \mathbb{R}^+ , on ne peut pas parler de **la** racine carrée mais d'**une** racine carrée et on ne peut pas utiliser le symbole $\sqrt{\quad}$.

Méthode 8 : Détermination des racines carrées d'un nombre complexe

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

- **Si on connaît la forme trigonométrique de z**

Si $z = re^{i\theta}$ où $r = |z|$, ses racines carrées sont $\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $-\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

- **Sinon, on utilise la forme algébrique de z**

On note $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ la forme cartésienne de z .

Soit $x, y \in \mathbb{R}$.

$$(x + iy)^2 = z \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = a & (\text{égalité des parties réelles}) \\ 2xy = b & (\text{égalité des parties imaginaires}) \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} & (\text{égalité des modules}) \end{cases}$$

On peut alors calculer x^2 et y^2 puis en déduire x et y , les signes relatifs de x et y étant donnés par l'équation $2xy = b$.

⇨ **Exemple 18 :** Calculer les racines carrées de $\sqrt{3} + i$ et de $-5 + 12i$.

5.3 Résolution des équations du second degré

Proposition 24 : Résolution de l'équation du second degré

Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ à coefficients $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$.
On appelle discriminant de l'équation, le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation admet une unique solution $z_0 = -\frac{b}{2a}$, appelée racine double et

$$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_0)^2.$$

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation admet deux solutions distinctes, $z_1 = \frac{-b - \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b + \delta}{2a}$, où δ est une racine carrée de Δ et

$$\forall z \in \mathbb{C}, az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Remarque : les racines d'une équation du second degré à coefficients complexes ne sont, en général, pas conjuguées.

⇨ **Exemple 19 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0.$$

⇨ **Exemple 20 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + 2z + 1 - \sqrt{3} - i = 0.$$

Proposition 25 : Relations coefficients racines

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors :

$$z_1, z_2 \text{ sont les solutions (éventuellement confondues) de l'équation } az^2 + bz + c = 0 \iff \begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

5.4 Factorisation

Proposition 26

Soit P une fonction polynomiale à coefficients complexes :

$$\begin{aligned} P: \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{k=0}^n a_k z^k, \end{aligned}$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$.

Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P , c'est-à-dire tel que $P(a) = 0$.

Alors, il existe une fonction polynomiale à coefficients complexes Q telle que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z - a)Q(z).$$

⇨ **Exemple 21 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^3 + (1 - i)z^2 + (-1 - 4i)z - 3 + i = 0.$$

On commencera par montrer que i est racine de cette équation.

VI Racines n -ièmes

6.1 Racines n -ièmes de l'unité

Définition 11

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle racine n -ième de l'unité tout nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$.
On note \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

Proposition 27

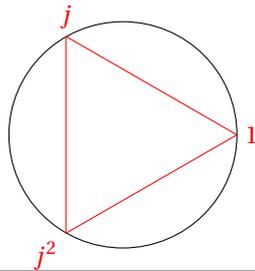
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \cup_n \subset \cup.$$

Proposition 28

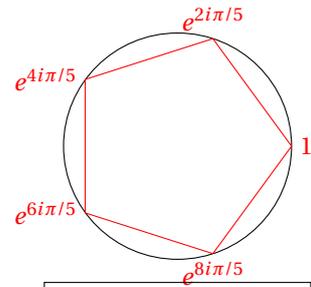
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. \cup_n est l'ensemble à n éléments :

$$\cup_n = \left\{ e^{2ik\pi/n}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}.$$

Remarque : Les points du plan complexe dont les affixes sont les racines n -ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique.



Représentation de \cup_3



Représentation de \cup_5

Les points en question sont tous situés sur le cercle trigonométrique et l'angle au centre formé par deux points consécutifs sur le cercle vaut $\frac{2\pi}{n}$.

Proposition 29

Soit $n \geq 2$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{2ik\pi/n} = 0.$$

6.2 Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Définition 12

Soient $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine n -ième de a tout nombre complexe z vérifiant $z^n = a$.

Méthode 9 : Détermination de racines

Pour résoudre une équation du type $z^n = a$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, on doit déterminer la forme trigonométrique de a : $a = |a|e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ puis on écrit :

$$\begin{aligned} z^n = a &\iff \frac{z^n}{a} = 1 \\ &\iff \left(\frac{z}{|a|^{1/n} e^{i\theta/n}} \right)^n = 1 \\ &\iff \frac{z}{|a|^{1/n} e^{i\theta/n}} \in \cup_n \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{z}{|a|^{1/n} e^{i\theta/n}} = e^{2ik\pi/n} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z = |a|^{1/n} e^{i(\theta/n + 2ik\pi/n)} \end{aligned}$$

Remarque :

- Comme pour la racine carrée, on n'écrit pas le symbole $\sqrt[n]{\cdot}$.
- Un nombre complexe non nul admet n racines n -ièmes distinctes.

⇨ **Exemple 22 :** Déterminer les racines 5-ièmes de $-2 + 2i$.

⇨ **Exemple 23 :** Résoudre l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^6 - 2iz^3 - 2 = 0.$$

VII Exponentielle complexe

Définition 13

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on appelle exponentielle de z et on note e^z ou $\exp(z)$ le nombre complexe défini par :

$$e^z = e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z}.$$

Proposition 30

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. On a :

- $|\exp(z)| = e^{\operatorname{Re} z}$ et $\operatorname{Im} z$ est un argument de $\exp(z)$.
- $\exp(z + z') = \exp(z) \exp(z')$.
- $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$
- $\frac{e^z}{e^{z'}} = e^{z-z'}$
- $(e^z)^n = e^{nz}$.
- $\exp(z) = \exp(z') \iff z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z} \iff \exists k \in \mathbb{Z}, z - z' = 2ik\pi$

Méthode 10 : Equation exponentielle

Pour résoudre une équation du type $e^z = a$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, on doit déterminer la forme trigonométrique de a : $a = |a|e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$ puis on écrit :

$$\begin{aligned} e^z = a &\iff e^z = |a|e^{i\theta} \\ &\iff e^z = e^{\ln|a| + i\theta} \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z}, z = \ln|a| + i\theta + 2ik\pi \end{aligned}$$

⇨ **Exemple 24 :** Soit $z \in \mathbb{C}$:

1. $e^z = -1 \iff$
2. $e^z = 1 + i \iff$
3. $e^z = 2 \iff$

VIII Interprétation géométrique des nombres complexes

8.1 Symétrie

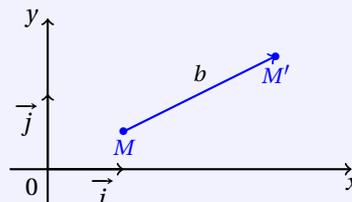
Proposition 31

L'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \bar{z}$ représente
la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

8.2 Translations

Proposition 32

Soit \vec{u} un vecteur du plan d'affixe $b \in \mathbb{C}$.
L'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto z + b$ représente
la translation de vecteur \vec{u} .



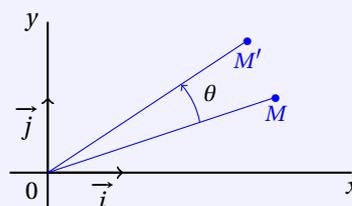
Preuve.

□

8.3 Rotations et homothéties

Proposition 33

Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
L'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto e^{i\theta}z$ représente
la rotation de centre O et d'angle θ .



Preuve.

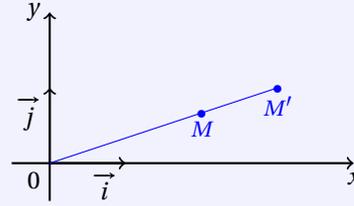
□

Définition 14

L'homothétie de centre $\Omega \in \mathcal{P}$ et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}^*$ est l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M , associe le point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$.

Proposition 34

Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
 L'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto \lambda z$ représente
 l'homothétie de centre O et de rapport λ .



Preuve.

□

Corollaire 6

Soit $a \in \mathbb{C}^*$.
 L'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$
 $z \mapsto az$ représente la composée de l'homothétie de centre O et de rapport $|a|$ avec la rotation de centre O et d'angle $\text{Arg}(a)$.

Remarque : Ces applications sont appelées des similitudes directes.

Preuve.

□

8.4 Alignement et orthogonalité

Proposition 35

Soit \vec{u}_1 et \vec{u}_2 deux vecteurs du plan non nuls d'affixes respectives z_1 et z_2 . Une mesure de l'angle (\vec{u}_1, \vec{u}_2) est donnée par un argument de $\frac{z_2}{z_1}$.

Par suite :

- \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont colinéaires si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$.
- \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont orthogonaux si et seulement si $\frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}$.

Preuve.

□

Corollaire 7

Soient A, B et C trois points du plan, deux à deux distincts et d'affixes respectives z_A, z_B et z_C . Une mesure de l'angle (\vec{AB}, \vec{AC}) est donnée par un argument de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$. Par suite :

- A, B et C sont alignés si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.
- ABC est rectangle en A si et seulement si $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

⇨ **Exemple 25** : Déterminer les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que les points d'affixes $1, z$ et z^2 forment un triangle rectangle.