Chapitre 5 : Fonctions usuelles

I Fonctions logarithmes, exponentielle, puissances

1.1 Fonction logarithme népérien

Définition 1

On appelle fonction logarithme népérien et on note ln l'unique primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en 1, ce qui s'écrit aussi :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

Remarque :

- Par définition, $x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Cependant, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$, elle admet donc des primitives sur $\mathbb{R}^*$. La fonction $F : x \mapsto \ln(|x|)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$. En effet :
  - Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $F(x) = \ln(x)$ et $F'(x) = \frac{1}{x}$.
  - Soit $x \in \mathbb{R}^{-*}$, $F(x) = \ln(-x)$ et $F'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$.

Proposition 1

- ln est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln'(x) = \frac{1}{x}$.
- ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

Corollaire 1

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $u : I \to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction dérivable. Alors $\ln \circ u$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ (\ln \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Proposition 2

- $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R}^{+*},\ \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(x^n) = n\ln(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(\sqrt[n]{x}) = \frac{1}{n}\ln(x)$.

Preuve.

□

Proposition 3

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \qquad \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$$

Preuve.

$\square$

Corollaire 2

La fonction logarithme népérien est bijective de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

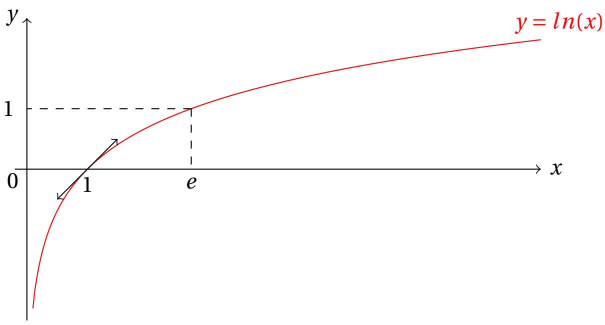
Preuve.

$\square$

Définition 2

On note e l'unique élément de $\mathbb{R}^{+*}$ tel que $\ln(e) = 1$.

La courbe représentative de la fonction ln est :



x	0		1		e		$+\infty$
$\ln'(x)$	‖			$+$			
$\ln$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Proposition 4

$$\forall x \in]-1,+\infty[,\ \ln(1+x) \leq x.$$

Preuve.

$\square$

1.2 Logarithme décimal, logarithme en base 2

Définition 3

On appelle logarithme décimal (ou logarithme en base 10) et on note log (ou $\log_{10}$) la fonction $\log : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln x}{\ln(10)} \end{array}$ On appelle logarithme en base 2 et on note $\log_2$ la fonction $\log_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln x}{\ln(2)} \end{array}$

Remarque :

- On a : $\log(10) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\log(10^n) = n$.
- On a : $\log_2(2) = 1$ et $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\log_2(2^n) = n$.

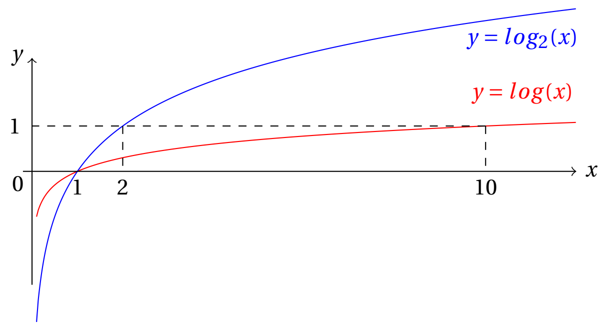
Proposition 5

log et $\log_2$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \log'(x) = \frac{1}{x\ln(10)} \text{ et } \log_2'(x) = \frac{1}{x\ln(2)}$$

Donc les fonctions log et $\log_2$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}_+^*$.

La courbe représentative des fonctions log et $\log_2$ sont :



x	0		1		10		$+\infty$
$\log'(x)$	||			$+$			
$\log$	||	$-\infty$	0		1		$+\infty$

x	0		1		2		$+\infty$
$\log_2'(x)$	||			$+$			
$\log_2$	||	$-\infty$	0		1		$+\infty$

1.3 Fonction exponentielle

Définition 4

On appelle fonction exponentielle et on note exp la fonction réciproque de la fonction ln.
On a donc : $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+*}$ et :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*},\ y = \exp x \Longleftrightarrow x = \ln y.$$

Proposition 6

La fonction exp est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$.

Preuve.

$\square$

Corollaire 3

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Corollaire 4

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $u : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Alors $\exp \circ u$ est dérivable sur I et :

$$\forall x \in I,\ (\exp \circ u)'(x) = u'(x).\exp(u(x)).$$

Proposition 7

- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x+y) = \exp(x).\exp(y)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.
- $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\big(\exp(x)\big)^n = \exp(nx)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{\exp(x)} = \exp\left(\frac{x}{n}\right)$.

Preuve.

□

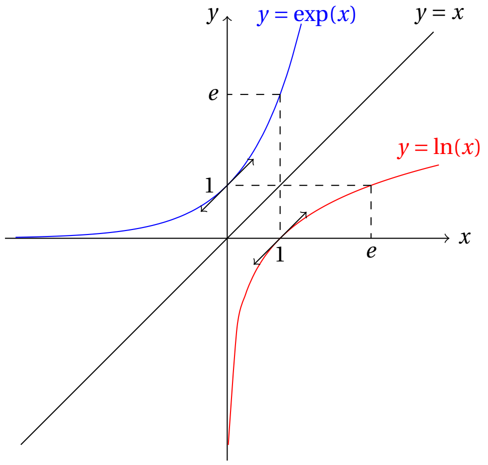
Proposition 8

$$\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} \exp(x) = 0, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)-1}{x} = 1,$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp(x)}{x} = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} x\exp(x) = 0.$$

Preuve.

□

La courbe représentative de la fonction exp est :



x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$(\exp)'(x)$				$+$			
$\exp$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

Proposition 9

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq x+1.$$

Preuve.

□

1.4 Fonctions puissances

Définition 5

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On appelle fonction puissance d'exposant α la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x)) \end{array}.$$

Remarque :

- Si $\alpha \in \mathbb{N}$, on peut définir, en utilisant des produits, la fonction puissance sur $\mathbb{R}$.
- Si $\alpha \in \mathbb{Z}^{-*}$, on peut définir, en utilisant des produits et un quotient, la fonction puissance sur $\mathbb{R}^*$.
- La définition générale faisant apparaître un logarithme népérien, la fonction puissance sera définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$, avec cette définition : $e^x = \exp(x \ln(e)) = \exp(x)$.

Proposition 10

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^\alpha \end{array}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée est $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \alpha x^{\alpha-1} \end{array}$.

Preuve.

□

Corollaire 5

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
• Si $\alpha > 0$, la fonction puissance α est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
• Si $\alpha < 0$, la fonction puissance α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
• Si $\alpha = 0$, la fonction puissance α est constante égale à 1 sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Proposition 11

Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$.

- Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = 0$.
- Si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = +\infty$.

Remarque : Si $\alpha \geq 0$, la fonction puissance α admet une limite finie en 0, on utilise cette limite pour prolonger la fonction.

Définition 6

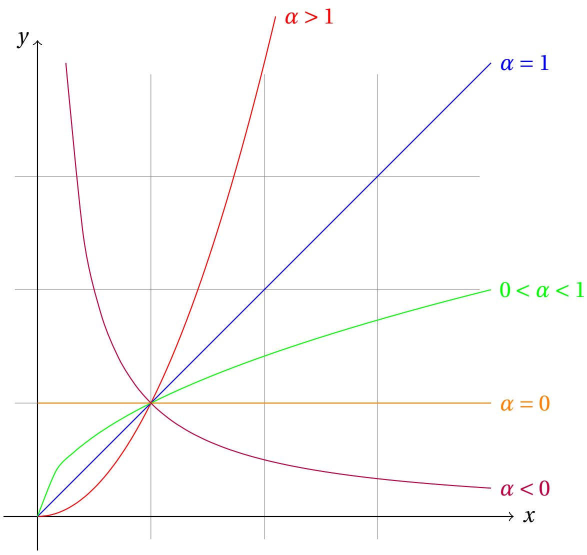
Soit $\alpha \geq 0$, on pose :

$$0^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } \alpha = 0. \end{cases}$$

Proposition 12

Soient $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a :

$$(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, \qquad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, \qquad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}, \qquad \ln\left(x^\alpha\right) = \alpha \ln(x)$$



Cas $\alpha > 0$:

x	0	1	$+\infty$
p_α	0 ↗	1	↗ $+\infty$

Cas $\alpha < 0$:

x	0	1	$+\infty$
p_α	‖ $+\infty$ ↘	1	↘ 0

➪ **Exemple 1 :** Etudier la fonction $f : x \mapsto x^{1/x}$.

1.5 Croissances comparées

Proposition 13

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^{+*}$. On a :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^{\beta}}{x^{\alpha}} = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\alpha} |\ln x|^{\beta} = 0$.
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^{\beta}} = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} |x|^{\beta} e^{\alpha x} = 0$.

Remarque : Ce résultat signifie que l'exponentielle l'emporte sur les fonctions puissances qui l'emportent sur le logarithme.

Preuve.

□

II Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

Définition 7

On définit les fonctions cosinus hyperbolique, noté ch, et sinus hyperbolique, noté sh, par :

$$\mathrm{ch} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}.$$

Proposition 14

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1.$$

Remarque :

- Ces deux fonctions sont appelées cosinus et sinus par analogie avec les formules d'Euler.
- On parle de trigonométrie hyperbolique car la proposition précédente montre que les points de coordonnées $(\mathrm{ch}(t), \mathrm{sh}(t))$ décrivent une hyperbole.

Proposition 15

ch est paire et sh est impaire.

Proposition 16

ch et sh sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$ et $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.

Proposition 17

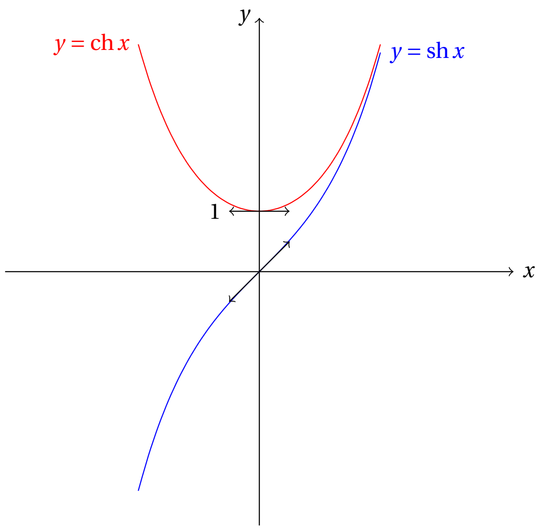
$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty \qquad \mathrm{ch}(0) = 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty \qquad \mathrm{sh}(0) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$$

Proposition 18

- ch est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
- sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathrm{sh}(x) > 0$, , $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $\mathrm{sh}(x) < 0$.

Les courbes représentatives des fonction ch et sh sont :



Cosinus hyperbolique :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}'(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Sinus hyperbolique :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}'(x)$			$+$		
sh	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

➪ **Exemple 2 :** Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$,

$$7\,\mathrm{ch}\, x + 2\,\mathrm{sh}\, x = 9.$$

➪ **Exemple 3 :** Etudier la fonction suivante :

$$\mathrm{th} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{\mathrm{sh}\, x}{\mathrm{ch}\, x} \end{array}.$$

III Fonctions circulaires réciproques

3.1 Définitions

La fonction cos est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[0,\pi]$, elle est donc bijective de $[0,\pi]$ vers $[\cos(\pi),\cos(0)] = [-1,1]$.

Définition 8

La fonction cos réalise une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$.
On appelle arc cosinus et on note Arccos : $[-1,1] \to [0,\pi]$ sa bijection réciproque.
On a :

$$\forall x \in [0,\pi],\ \forall y \in [-1,1],\ \big(\cos x = y \iff x = \operatorname{Arccos}(y)\big).$$

La fonction sin est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, elle est donc bijective de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ vers $\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right),\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-1,1]$.

Définition 9

La fonction sin réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1,1]$.
On appelle arc sinus et on note Arcsin : $[-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ sa bijection réciproque. On a :

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\ \forall y \in [-1,1],\ \big(\sin x = y \iff x = \operatorname{Arcsin}(y)\big).$$

La fonction tan est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, elle est donc bijective de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ vers $\left]\lim_{-\frac{\pi}{2}^+}\tan, \lim_{\frac{\pi}{2}^-}\tan\right[= \mathbb{R}$.

Définition 10

La fonction tan réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
On appelle arc tangente et on note Arctan : $\mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sa bijection réciproque. On a :

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[,\ \forall y \in \mathbb{R},\ \big(\tan x = y \iff x = \operatorname{Arctan}(y)\big).$$

Formule 1 : Quelques valeurs

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Arccos}(1) = 0 & \operatorname{Arcsin}(0) = 0 & \operatorname{Arctan}(0) = 0 \\
\operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} & \operatorname{Arcsin}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6} & \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6} \\
\operatorname{Arccos}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} & \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} & \operatorname{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4} \\
\operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} & \operatorname{Arcsin}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} & \operatorname{Arctan}\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} \\
\operatorname{Arccos}(0) = \frac{\pi}{2} & \operatorname{Arcsin}(1) = \frac{\pi}{2} & \lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan}(x) = \frac{\pi}{2}
\end{array}$$

3.2 Etude des fonctions

Proposition 19

Arccos $\in \mathcal{C}^0([-1,1])$ et Arcsin $\in \mathcal{C}^0([-1,1])$
Arccos $\in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[)$,Arcsin $\in \mathcal{C}^\infty(]-1,1[)$ et Arctan $\in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$

$$\forall x \in]-1,1[\operatorname{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \operatorname{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Corollaire 6

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
• Soit $u : I \to]-1,1[$ dérivable alors :

$$\forall x \in I,\ (\text{Arccos} \circ u)'(x) = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}},\ (\text{Arcsin} \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u(x)^2}}$$

• Soit $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable alors :

$$\forall x \in I,\ (\text{Arctan} \circ u)'(x) = \frac{u'(x)}{1+u(x)^2}$$

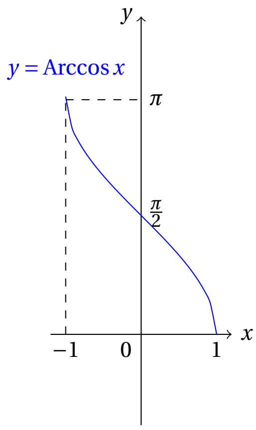
Proposition 20

- Arccos est strictement décroissante sur $[-1,1]$.
- Arcsin est strictement croissante sur $[-1,1]$.
- Arctan est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

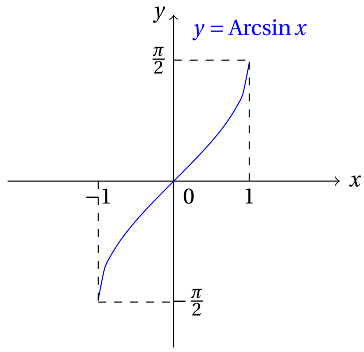
Proposition 21

Arcsin et Arctan sont impaires.

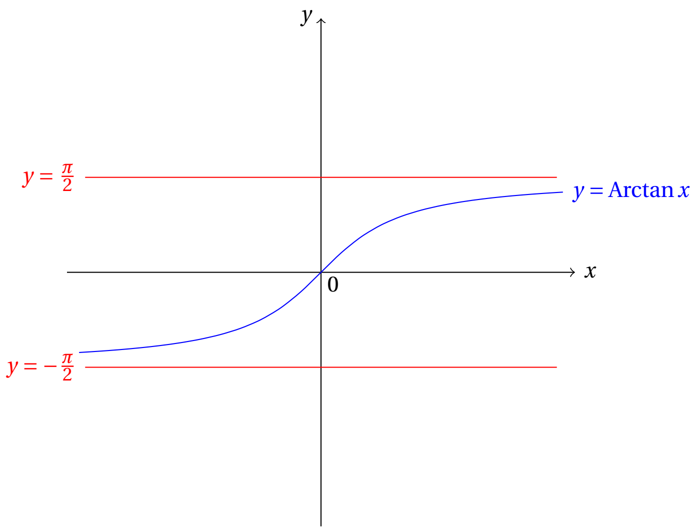
x	-1	0	1
Arccos	π ↘	$\frac{\pi}{2}$ ↘	0



x	-1	0	1
Arcsin	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$



x	$-\infty$	0	$+\infty$
Arctan	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	0 ↗	$\frac{\pi}{2}$



3.3 Applications

Méthode 1

Pour montrer une **formule** faisant apparaître des fonctions trigonométriques réciproques, on doit :

- donner le domaine de définition de la formule,
- introduire une fonction f telle que la formule revienne à montrer que cette fonction est nulle,
- étudier le domaine de dérivabilité de f et montrer que f' est nulle,
- en déduire que f est constante sur chaque intervalle de son domaine de dérivabilité et, si besoin, utiliser un argument de continuité pour montrer que f est constante sur chaque intervalle de son domaine de définition,
- prendre une ou des valeurs pour montrer que la ou les constantes sont nulles.

➪ **Exemple 4 :** Montrer que :

$$\forall x \in [-1,1], \operatorname{Arcsin}(x) + \operatorname{Arccos}(x) = \frac{\pi}{2}.$$

➪ **Exemple 5 :** Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = sgn(x).\frac{\pi}{2}$$

où sgn(x) est le signe de x.

Proposition 22

Soit $x \in [-1,1]$,

$$\cos(\operatorname{Arccos}(x)) = x, \quad \sin(\operatorname{Arccos}(x)) = \sqrt{1-x^2}, \quad \text{si } x \neq 0, \tan(\operatorname{Arccos}(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\cos(\operatorname{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}, \quad \sin(\operatorname{Arcsin}(x)) = x, \quad \text{si } |x| \neq 1, \tan(\operatorname{Arcsin}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin(\operatorname{Arctan}(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \tan(\operatorname{Arctan}(x)) = x$$

Remarque : Il faut bien faire attention au sens de la composition et au domaine.

➪ **Exemple 6 :** Représenter la fonction :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{Arcsin}(\sin x) \end{array}$$

Méthode 2

Pour **résoudre une équation** (E) faisant apparaître des fonctions trigonométriques réciproques, on doit :

- donner le domaine de définition de l'équation (E),
- raisonner par analyse-synthèse,
- dans l'analyse :
  - appliquer une fonction trigonométrique bien choisie à l'équation (E) pour en déduire une équation (E'),
  - raisonner par équivalences pour résoudre (E'),
  - conclure l'analyse,
- dans la synthèse :
  - considérer les solutions obtenues à la fin de l'analyse,
  - remonter les équivalences pour en déduire qu'elles vérifient (E'),
  - étudier des appartenances à des ensembles bien choisis pour vérifier si on peut ou non "enlever" les fonctions trigonométriques introduites dans l'analyse et ainsi vérifier (E).

➪ **Exemple 7 :** Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Arcsin}\frac{4}{5} + \operatorname{Arcsin}\frac{5}{13} = \operatorname{Arcsin} x.$$

➪ **Exemple 8 :** Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

IV Dérivation d'une fonction complexe d'une variable réelle

4.1 Définition

Dans toute la suite, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes.

Définition 11

On définit la partie réelle de f notée $\mathrm{Re}(f)$ et la partie imaginaire de f notée $\mathrm{Im}(f)$ par :

- $\mathrm{Re}(f) : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Re}(f(x)) \end{array}$
- $\mathrm{Im}(f) : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mathrm{Im}(f(x)) \end{array}$

Remarque : Les propriétés de la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ se ramènent alors aux propriétés des fonctions $\mathrm{Re}(f) : I \to \mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(f) : I \to \mathbb{R}$.

Définition 12

f est continue sur I si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.

Définition 13

On dit que f est dérivable sur I si $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont dérivables sur I. On appelle alors dérivée de f et on note f' la fonction définie par : $f' : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & (\mathrm{Re}(f))'(x) + i(\mathrm{Im}(f))'(x) \end{array}$.

Remarque : On a ainsi : $\mathrm{Re}(f') = \left(Re(f)\right)'$ et $\mathrm{Im}(f') = \left(\mathrm{Im}(f)\right)'$

Proposition 23 : Opérations sur les fonctions dérivables

Soient $f, g : I \to \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables sur I et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors $(\lambda f + \mu g)$, fg sont dérivables sur I. De plus, si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \qquad (fg)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Remarque : Ces formules sont semblables à celle concernant les fonctions à valeurs réelles.

4.2 Exponentielle complexe

Proposition 24

Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I. Alors, la fonction $\exp\circ\varphi : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{\varphi(x)} \end{array}$ est dérivable sur I et on a :

$$\forall x \in I,\ (\exp\circ\varphi)'(x) = \varphi'(x)e^{\varphi(x)}$$

Corollaire 7

Soit $a \in \mathbb{C}$, la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{ax} \end{array}$ est dérivable et sa dérivée est : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & ae^{ax} \end{array}$.