Chapitre 6 : Suites numériques : propriétés globales

I Généralités sur les suites

1.1 Modes de définition d'une suite

Définition 1

Une suite réelle est une application qui à un entier naturel associe un réel. La suite qui à tout entier naturel n associe le réel u_n est notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n).
L'ensemble des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Remarque :

- Il ne faut pas confondre la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec son terme d'indice n : u_n.
- Par extension, nous appellerons aussi suite réelle une famille de réels indexée par un intervalle d'entiers du type $[\![n_0,+\infty[\![$. La suite est dans ce cas notée $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Une suite peut être définie de trois manières différentes :

- **De manière explicite** : chaque terme de la suite est donné directement en fonction de n.
Par exemple : on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\frac{1}{n^2+1}.$$
- **Par récurrence** : u_n est exprimé en fonction des termes précédents : u_{n-1}, ... u_0.
Par exemple : on considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$u_0=1 \text{ et } \ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{u_n+2}$$
$$v_0=0, v_1=1 \text{ et } \ \forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+2}=v_{n+1}+v_n.$$
- **De manière implicite** : u_n est défini par une propriété non explicite dépendant de n.
Par exemple : on considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout $n\in\mathbb{N}$, u_n est l'unique solution de l'équation $x^3+x-1=n$.

1.2 Monotonie

Définition 2

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- croissante ssi : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leq u_{n+1}$.
- décroissante ssi : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq u_{n+1}$.
- monotone ssi elle est soit croissante soit décroissante.
- strictement croissante ssi $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n<u_{n+1}$.
- strictement décroissante ssi : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>u_{n+1}$.
- strictement monotone ssi elle est soit strictement croissante soit strictement décroissante.
- constante ssi : $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=u_n$
  ssi : $\exists c\in\mathbb{R}, \forall n\in\mathbb{N}, u_n=c$.
- stationnaire ssi elle est constante à partir d'un certain rang
  ssi : $\exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N,\ u_{n+1}=u_n$
  ssi : $\exists c\in\mathbb{R}, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geq N,\ u_n=c$.

Méthode 1

Pour étudier la monotonie d'une suite (u_n), on peut étudier le signe de :
$$u_{n+1}-u_n.$$

Remarque : Si on ne connaît pas le signe de u_n, il ne faut pas étudier le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

➪ **Exemple 1 :** On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 > 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}.$$

Etudions la monotonie de (u_n).

1.3 Suites minorées, majorées, bornées

Définition 3

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- majorée ssi : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.
- minorée ssi : $\exists m \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n$.
- bornée ssi : $\exists m, M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m \leq u_n \leq M$
  ssi : $\exists M \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M$.

➪ **Exemple 2 :** On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{(-1)^n + u_n}{2}.$$

Montrons que (u_n) est bornée.

II Suites arithmétiques, suites géométriques, arithmético-géométriques

2.1 Suites arithmétiques, suites géométriques

Définition 4

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

- arithmétique ssi il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + r$.
  r est appelé raison de la suite.
- géométrique ssi il existe $q \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = q u_n$.
  q est appelé raison de la suite.

Proposition 1

- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison $r\in\mathbb{R}$ alors :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = u_0 + nr.$$
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $q\in\mathbb{R}$ alors :
$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = u_0.q^n.$$

Proposition 2

Soit $n_0\in\mathbb{N}$.

- Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est arithmétique de raison $r\in\mathbb{R}$ alors :
$$\forall n\geq n_0,\ u_n = u_{n_0} + (n-n_0)r.$$
- Si $(u_n)_{n\geq n_0}$ est géométrique de raison $q\in\mathbb{R}$ alors :
$$\forall n\geq n_0,\ u_n = u_{n_0}q^{n-n_0}.$$

Remarque : Ce résultat est la généralisation du résultat précédent dans le cas où les suites ne sont pas définies à partir du rang 0 mais à partir d'un rang quelconque n_0.

➪ **Exemple 3 :** On pose :
$$u_0 = 5,\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - (n+1),$$
$$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = u_n - n - 2.$$
Déterminer le terme général de la suite (u_n).

2.2 Suites arithmético-géométriques

Définition 5

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est d ite arithmético-géométrique ssi il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n+b$ avec $a\neq 1$ et $b\neq 0$.

Remarque : Le cas $a=1$ correspond à une suite arithmétique et le cas $b=0$ à une suite géométrique.

Méthode 2

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique : il existe $a,b\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + b$ avec $a\neq 1$ et $b\neq 0$.

- On cherche l tel que $l = al + b$.
- On a alors : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1} - l = a(u_n - l)$. Donc en posant : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = u_n - l$, la suite (v_n) est géométrique de raison a.
- On a alors : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n = v_0.a^n$.
- On en déduit : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = v_0.a^n + l$.

➪ **Exemple 4 :** On pose : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n + 1$.
Déterminer le terme général de la suite (u_n).

III Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Proposition 3

Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^*$. On considère la relation de récurrence linéaire d'ordre 2 :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n. \quad (*)$$

L'équation $r^2 - ar - b = 0$ est appelée équation caractéristique.

- Si l'équation caractéristique admet deux solutions distinctes $r_1, r_2 \in \mathbb{K}$ (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), les suites vérifiant $(*)$ sont de la forme :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n,\ \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$
- Si l'équation caractéristique admet une solution double $r \in \mathbb{R}$, les suites vérifiant $(*)$ sont de la forme :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (\lambda + \mu n) r^n,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

➪ **Exemple 5 :** On pose : $u_0 = -1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.
Déterminer le terme général de la suite (u_n).

➪ **Exemple 6 :** On pose : $u_0 = 0$, $u_1 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -2u_{n+1} - u_n$.
Déterminer le terme général de la suite (u_n).

➪ **Exemple 7 :** On pose : $u_0 = 1$, $u_1 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_n$.
Déterminer le terme général de la suite (u_n).

IV Suites récurrentes d'ordre 1

Définition 6

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que I est un intervalle stable par f ssi $f(I) \subset I$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in I,\ f(x) \in I.$$

Proposition 4

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que I est stable par f. Alors la suite :

$$u_0 \in I,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

est bien définie et on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in I.$$

Preuve.

□

➪ **Exemple 8 :** On pose : $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

➪ **Exemple 9 :** On pose : $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n - 1}$.

Méthode 3

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$. On suppose que I est stable par f. On considère la suite définie par :

$$u_0 \in I, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

Pour étudier la monotonie de la suite (u_n), on peut :

- étudier le signe de $f(x) - x$ pour $x \in I$. Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ et $f(u_n) - u_n = u_{n+1} - u_n$, on en déduit la monotonie de (u_n). On utilise cette méthode quand on ne connaît pas la valeur de u_0.
- si f est **croissante**. On peut montrer par récurrence que (u_n) est **monotone**. De plus :
  - Si $u_0 \leq u_1$, alors (u_n) est croissante,
  - Si $u_0 \geq u_1$, alors (u_n) est décroissante.

  On utilise cette méthode quand on connaît la valeur de u_0.

➪ **Exemple 10 :** On pose : $u_0 \in \mathbb{R}^+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
Etudier la monotonie de (u_n).

➪ **Exemple 11 :** On pose : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{\pi}\text{Arcsin}\,(u_n)$.
Etudier la monotonie de (u_n).