# Corrections :
## Preuve du théorème des valeurs intermédiaires

**Théorème 5 : Théorème des valeurs intermédiaires**

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors, pour tout $y$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

$$\exists c \in [a,b],\ f(c) = y.$$

1. - Pour $n = 0$, $a_0 = a \leq b = b_0$ et on a $b_0 - a_0 = b - a = \dfrac{b-a}{2^0}$, $g(a_0)g(b_0) = g(a)g(b) \leq 0$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $a \leq a_n \leq b_n \leq b$ et $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, $g(a_n)g(b_n) \leq 0$.
     - On a : $a \leq a_n \leq \frac{a_n+b_n}{2} \leq b_n \leq b$ donc $a_n, \frac{a_n+b_n}{2}, b_n \in [a,b]$. Or $I$ est un intervalle donc $[a,b] \subset I$. Ainsi : $a_n, \frac{a_n+b_n}{2}, b_n \in I$ donc $g(a_n), g\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right), g(b_n)$ sont bien définis.
     - Si $g(a_n)g\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0$, on pose $(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right)$. Ainsi, on a $g(a_{n+1})g(b_{n+1}) \leq 0$.
       De plus $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.
       Enfin, d'après l'hypothèse de récurrence, $a \leq a_n \leq \dfrac{a_n+b_n}{2} \leq b_n \leq b$ donc $a \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b$.
     - sinon, on a $g(a_n)g\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > 0$, on pose alors $(a_{n+1}, b_{n+1}) = \left(\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right)$.
       Ainsi, on a $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \dfrac{a_n+b_n}{2} = \dfrac{b_n-a_n}{2} = \dfrac{b-a}{2^{n+1}}$.
       De plus, d'après l'hypothèse de récurrence, $a \leq a_n \leq \dfrac{a_n+b_n}{2} \leq b_n \leq b$ donc $a \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b$.
       Enfin, on a $g(a_{n+1})g(b_{n+1}) = g\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)g(b_n) = \dfrac{g(a_n)g\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)^2 g(b_n)}{g(a_n)g\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)}$.
       Or, $g(a_n)g(b_n) \leq 0$ donc le numérateur est négatif. Le dénominateur est quant à lui strictement positif. Ainsi,$g(a_{n+1})g(b_{n+1}) \leq 0$.
   - Ainsi, par récurrence :
     $$\forall n \in \mathbb{N},\ a \leq a_n \leq b_n \leq b,\ b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \text{ et } g(a_n)g(b_n) \leq 0.$$

2. - Soit $n \in \mathbb{N}$ :
     - Si $g(a_n)g\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \leq 0$, on a : $a_{n+1} - a_n = 0$ et $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n+b_n}{2} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2} \geq 0$.
     - Sinon, on a : $a_{n+1} - a_n = \dfrac{a_n+b_n}{2} - a_n = \dfrac{b_n-a_n}{2} \geq 0$ et $b_{n+1} - b_n = b_n - b_n = 0$.

     Dans tous les cas $a_{n+1} - a_n \geq 0$ et $b_{n+1} - b_n \leq 0$. Ainsi, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   - De plus, $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \left(\dfrac{b-a}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ donc $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

   Ainsi, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

3. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes elles convergent vers la même limite que l'on note $c$.
   Comme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leq a_n \leq b_n \leq b$, on a par passage à la limite dans les inégalités :
   $$c \in [a,b].$$
   Comme $I$ est un intervalle, $[a,b] \subset I$ donc $c \in I$.
   Comme $g$ est continue sur $I$, $(g(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(c)$ et $(g(b_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $g(c)$.
   De plus : $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(a_n)g(b_n) \leq 0$. D'où en passant à la limite cette inégalité :
   $$g(c)^2 \leq 0.$$
   Ainsi :
   $$g(c) = 0.$$

# Preuve du théorème des bornes atteintes

**Théorème de Bolzano-Weierstrass (Hors programme)**

Toute suite réelle bornée admet une suite extraite convergente.

1. (a)
   - Pour $n=0$,
     On a : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in[-M,M]=S_0$ donc $S_0$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)$.
   - Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que le segment $S_n=[a_n,b_n]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)$.
     - Si $\left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)$.
       Alors $S_{n+1}=[a_{n+1},b_{n+1}]=\left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)$.
     - Sinon, $\left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]$ contient un nombre fini de termes de la suite $(u_n)$ et $S_n=[a_n,b_n]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)$. donc $\left]\frac{a_n+b_n}{2},b_n\right]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)$.
       Ainsi $S_{n+1}=[a_{n+1},b_{n+1}]=\left]\frac{a_n+b_n}{2},b_n\right]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)$.
   - Donc, par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, le segment $S_n=[a_n,b_n]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)$.

   (b) Soit $n\in\mathbb{N}$,
   - Si $\left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)$.
     Alors $S_{n+1}=[a_{n+1},b_{n+1}]=\left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]\subset[a_n,b_n]=S_n$.
   - Sinon, $S_{n+1}=[a_{n+1},b_{n+1}]=\left]\frac{a_n+b_n}{2},b_n\right]\subset[a_n,b_n]=S_n$.

   (c) Soit $n\in\mathbb{N}$,
   - Si $\left[a_n,\frac{a_n+b_n}{2}\right]$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)$.
     Alors $b_{n+1}-a_{n+1}]=\frac{a_n+b_n}{2}-a_n=\frac{n_n-a_n}{2}$.
   - Sinon, $b_{n+1}-a_{n+1}]=b_n-\frac{a_n+b_n}{2}=\frac{n_n-a_n}{2}$.

   Ainsi $(b_n-a_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. Or $b_0-a_0=2M$ donc :
   $$\forall n\in\mathbb{N},\ b_n-a_n=\frac{M}{2^{n-1}}.$$

   (d)
   - Soit $n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}-a_n=0$ ou $\frac{b_n-a_n}{2}$ donc $a_{n+1}-a_n\geq 0$.
     Ainsi $(a_n)$ est croissante.
   - Soit $n\in\mathbb{N}$, $b_{n+1}-b_n=\frac{a_n-b_n}{2}$ ou $0$ donc $b_{n+1}-b_n\leq 0$.
     Ainsi $(b_n)$ est décroissante.
   - $\lim(b_n-a_n)=\lim\frac{M}{2^{n-1}}=0$.

   Donc les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes.

2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}$, $S_{n+1}$ contient une infinité de termes de la suite $(u_n)$, donc l'ensemble $\{m\in\mathbb{N},\ \varphi(n)<m \text{ et } u_m\in S_{n+1}\}$ est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$. Il admet donc un minimum.

   (b) Soit $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n+1)\in\{m\in\mathbb{N},\ \varphi(n)<m \text{ et } u_m\in S_{n+1}\}$ donc : $\varphi(n)<\varphi(n+1)$.
   Ainsi $\varphi$ est strictement croissante.

   (c) Soit $n\in\mathbb{N}$, $\varphi(n+1)\in\{m\in\mathbb{N},\ \varphi(n)<m \text{ et } u_m\in S_{n+1}\}$ donc : $u_{\varphi(n+1)}\in S_{n+1}$.
   De plus : $u_{\varphi(0)}=u_0\in[-M,M]=S_0$. Donc :
   $$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{\varphi(n)}\in S_n.$$

3.
   - Comme $\varphi:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $(u_{\varphi(n)})$ est extraite de $(u_n)$.
   - Comme $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes, elles convergent vers une limite commune $l$.
   - Comme $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{\varphi(n)}\in S_n$, on a :
     $$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n\leq u_{\varphi(n)}\leq b_n.$$
     Ainsi, par théorème d'encadrement :
     $$\lim u_{\varphi(n)}=l.$$
   - Donc $(u_n)$ admet une suite extraite convergente.

**Théorème 6 : Théorème des bornes atteintes**

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
Autrement dit, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ avec $a < b$, alors il existe $c, d \in [a,b]$ tel que :

$$\forall x \in [a,b],\ f(c) \leq f(x) \leq f(d),$$

1. 
   - Si $\sup f \in \mathbb{R}$.
     Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sup f - \frac{1}{n+1} < \sup f$ donc $\sup f - \frac{1}{n+1}$ n'est pas un majorant de $f$. Ainsi, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que :
     $$f(x_n) > \sup f - \frac{1}{n+1}.$$
     Donc :
     $$\forall n \in \mathbb{N}, \sup f - \frac{1}{n+1} < f(x_n) \leq \sup f.$$
     Donc, par théorème d'encadrement, $\lim f(x_n) = \sup f$.
   - Si $\sup f = +\infty$.
     Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $n$ n'est pas un majorant de $f$. Ainsi, il existe $x_n \in [a,b]$ tel que :
     $$f(x_n) > n.$$
     Donc :
     $$\forall n \in \mathbb{N}, n < f(x_n).$$
     Donc, par théorème de comparaison, $\lim f(x_n) = +\infty = \sup f$.
2. 
   - $(x_n)$ est une suite de $[a,b]$ donc est bornée. Ainsi d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, $(x_n)$ admet une suite extraite $(x_{\varphi(n)})$ qui converge vers $d \in [a,b]$.
   - Comme $(f(x_{\varphi(n)}))$ est extraite de $f(x_n)$, on a : $\lim f(x_{\varphi(n)}) = \sup f$.
   - Comme $f$ est continue sur $[a,b]$, on a : $\lim f(x_{\varphi(n)}) = f(d)$.
   - Ainsi :
     $$f(d) = \sup f.$$
     Donc $\sup f \in \mathbb{R}$ ainsi $f$ est majorée et sa borne supérieure est atteinte.