Preuve du théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 5 : Théorème des valeurs intermédiaires

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b \in I$ tels que $a < b$. Alors, pour tout y compris entre $f(a)$ et $f(b)$,

$$\exists c \in [a, b],\ f(c) = y.$$

Quitte à changer f en $-f$, on peut supposer que $f(a) \leq f(b)$.
Soit $y \in [f(a), f(b)]$.
Posons :

$$g : \begin{array}{rcl} I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) - y \end{array}.$$

On cherche à prouver qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$.

On construit par récurrence deux suites adjacentes $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $[a, b]$ dont la limite commune c vérifie $g(c) = 0$. La construction de ces suites est basée sur le principe de dichotomie.

On pose :

$$a_0 = a,\ b_0 = b$$
$$\forall n \in \mathbb{N},\ (a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right) & \text{si } g(a_n)g\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \leq 0 \\ \left(\dfrac{a_n + b_n}{2}, b_n\right) & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a \leq a_n \leq b_n \leq b,\ b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n} \text{ et } g(a_n)g(b_n) \leq 0.$$

2. Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
3. Soit c la limite commune des suites (a_n) et (b_n).
   Montrer que $c \in I$ et que $g(c) = 0$.

Preuve du théorème des bornes atteintes
(Hors programme)

Théorème de Bolzano-Weierstrass (Hors programme)

Toute suite réelle bornée admet une suite extraite convergente.

Soit (u_n) une suite réelle bornée. Il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq M.$$

On définit les suites (a_n) et (b_n) par :

$$a_0 = -M,\ b_0 = M$$

$$(a_{n+1}, b_{n+1}) = \begin{cases} \left(a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right) & \text{si } \left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right] \text{ contient une infinité de termes de la suite } (u_n), \\ \left(\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le segment $S_n = [a_n, b_n]$ contient une infinité de termes de la suite (u_n).
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} \subset S_n$.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n - a_n = \frac{M}{2^{n-1}}$.
   (d) En déduire que les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes.
2. On pose $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que :

$$\varphi(0) = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n+1) = \min(\{m \in \mathbb{N},\ \varphi(n) < m \text{ et } u_m \in S_{n+1}\}).$$

   (a) Montrer que φ est bien définie.
   (b) Montrer que φ est strictement croissante.
   (c) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{\varphi(n)} \in S_n$.
3. Conclure.

Théorème 6 : Théorème des bornes atteintes

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.
Autrement dit, si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a, b]$ avec $a < b$, alors il existe $c, d \in [a, b]$ tel que :

$$\forall x \in [a, b],\ f(c) \leq f(x) \leq f(d),$$

Par définition de la borne supérieure, $\sup f$ existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

1. Montrer qu'il existe (x_n) suite de $[a, b]$ telle que $\lim f(x_n) = \sup f$.
2. Conclure.