Correction :
Méthode de Newton

1.
   - Pour $n=0$, x_0 est défini et $f(x_0) > f(c)$ ainsi, comme f est strictement croissante : $x_0 > c$. De plus, $x_0 \in [a,b]$ donc $x_0 \in [c,b]$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons x_n défini et $x_n \in [c,b]$.
     Comme $f'(x_n) \neq 0$, alors $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ est défini.
     Comme f est strictement croissante, on a : $f(x_n) > 0$ donc $\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} > 0$, ainsi :
     $$x_{n+1} < x_n \leq b.$$
     Comme f est convexe, f est au-dessus de ses tangentes, donc :
     $$\forall x \in [a,b],\ f(x) \geq f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n).$$
     Ainsi :
     $$0 = f(c) \geq f'(x_n)(c - x_n) + f(x_n).$$
     Donc :
     $$f(x_n) \leq f'(x_n)(x_n - c).$$
     Or : $f'(x_n) > 0$ donc :
     $$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq x_n - c.$$
     Ainsi :
     $$c \leq x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_{n+1}.$$
     D'où $x_{n+1} \in [c,b]$.
   - Donc, par récurrence : la suite (x_n) est bien définie dans $[c,b]$.
2.
   - La suite (x_n) est à valeurs dans $[c,b]$ donc est bornée.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $f(x_n) \geq 0$ et $f'(x_n) > 0$, on a :
     $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \leq x_n.$$
     Donc (x_n) est décroissante.
   - Ainsi, (x_n) converge vers $l \in [c,b]$.
   - Comme f et f' sont continues, on a :
     $$l = l - \frac{f(l)}{f'(l)},$$
     ainsi :
     $$f(l) = 0.$$
     Et comme f admet un unique zéro c, on a : $l = c$.
3. (a)
   - g est dérivable sur $[a,b]$ et, soit $x \in [a,b]$, on a :
     $$\begin{aligned} g'(x) &= 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \\ &= \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}. \end{aligned}$$
   -
     - Comme f' est continue sur le segment $[a,b]$, il existe $\alpha \in [a,b]$ tel que :
       $$\forall x \in [a,b],\ f'(x) \geq f'(\alpha).$$
       Posons $m = f'(\alpha)$, on a alors :
       $$\forall x \in [a,b],\ f'(x) \geq m > 0,$$
       car $f' > 0$.
     - Comme f'' est continue sur le segment $[a,b]$, il existe $M \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f''| \leq M$.
     - Comme f' est continue sur le segment $[a,b]$, il existe $k \in \mathbb{R}^+$ tel que $|f'| \leq k$.
       Ainsi, d'après l'inégalité des accroissements finis :
       $$\forall t \in [a,b],\ |f(t)| = |f(t) - f(c)| \leq k|t - c|.$$

- Ainsi, soit $x \in [c, b]$ soit $t \in [c, x]$,

$$\begin{aligned}|g'(t)| &= \left|\frac{f(t)f''(t)}{f'(t)^2}\right| \\ &\leq \frac{kM|t-c|}{m^2} \\ &\leq \frac{kM|x-c|}{m^2}.\end{aligned}$$

Posons : $K = \frac{kM}{m^2}$, alors :

$$\forall x \in [c, b], \forall t \in [c, x], |g'(t)| \leq K|x-c|.$$

(b) Soit $x \in [c, b]$. D'après l'inégalité des accroissements finis :

$$|g(x) - g(c)| \leq K|x-c|^2.$$

Or $g(c) = c$ donc :

$$|g(x) - c| \leq K|x-c|^2.$$

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = g(x_n)$, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_{n+1} - c| \leq K|x_n - c|^2.$$

4. - Pour $n = 0$, comme $x_0, c \in [a, b]$, on a :

$$|x_0 - c| \leq b - a = \frac{1}{K}(K(b-a))^{2^0}.$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $|x_n - c| \leq \frac{1}{K}(K(b-a))^{2^n}$. Alors :

$$\begin{aligned}|x_{n+1} - c| &\leq K|x_n - c|^2 \\ &\leq K\left(\frac{1}{K}(K(b-a))^{2^n}\right)^2 \\ &\leq \frac{1}{K}(K(b-a))^{2^{n+1}}.\end{aligned}$$

- Donc, par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |x_n - c| \leq \frac{1}{K}(K(b-a))^{2^n}.$$

5. Si $K(b-a) < 1$, $\lim\limits_{n_t o+\infty} (K(b-a))^{2^n} = 0$ donc (x_n) converge vers c.

Programmation

```
def newton(f,fp,x0,epsilon) :
    x=x0
    while abs(f(x))>epsilon :
        x=x-f(x)/fp(x)
    return x
```