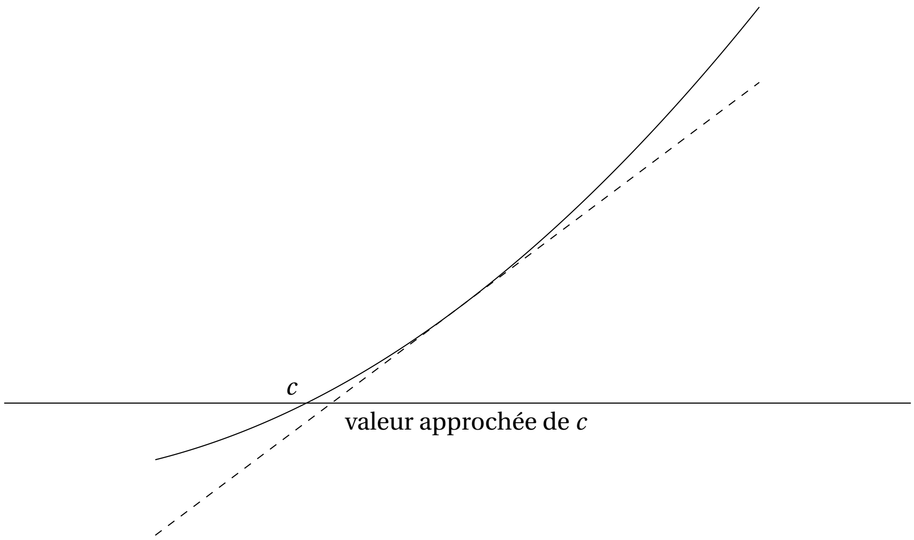
Méthode de Newton

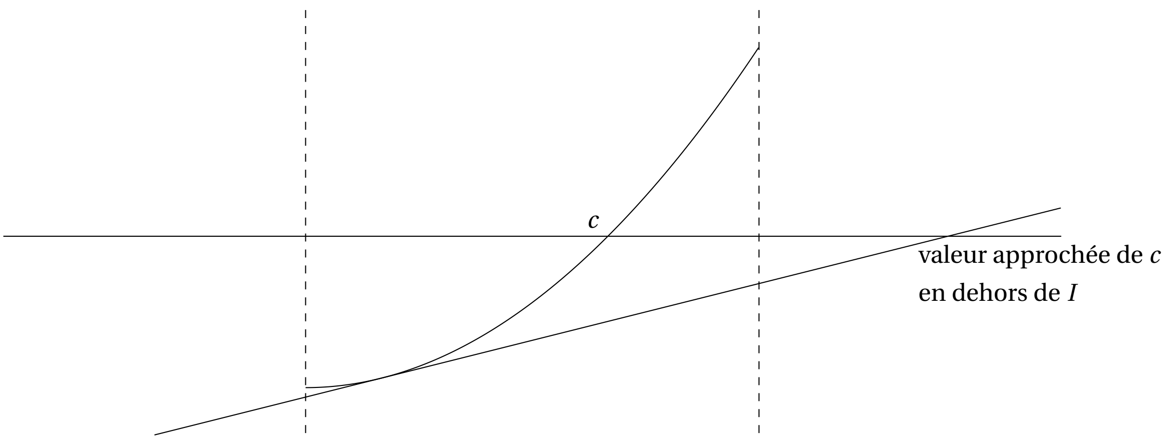
Principe de la méthode

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction dérivable sur I telle que f' ne s'annule pas. On suppose que f admet un zéro noté c que l'on cherche à approcher.

La méthode de Newton consiste à approcher la courbe représentative de f par sa tangente :



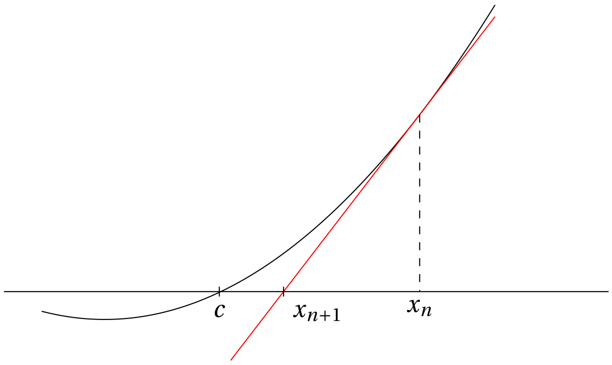
On va donc considérer le point d'intersection de la tangente avec l'axe des abscisses.
Ce point est bien défini car on suppose que f' ne s'annule pas donc qu'il n'existe pas de tangente horizontale.
Le principe d'approcher la courbe par sa tangente n'est pas toujours possible car si f est définie sur un intervalle I, la valeur obtenue peut ne pas appartenir à I. Par exemple :



Il faut donc avoir des hypothèses qui assurent la bonne définition.

Définition d'une suite

Ainsi, le principe de la méthode de Newton est de construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, si x_n est construit, x_{n+1} est l'abscisse de l'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à f au point x_n.



L'équation de la tangente en x_n est :

$$y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n).$$

Ainsi, comme x_{n+1} est l'abscisse de l'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à f au point x_n, on a :

$$0 = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + f(x_n),$$

c'est à dire :

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

On va donc étudier la suite définie par :

$$\boxed{\begin{cases} x_0 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}}$$

I Convergence de la méthode

On suppose que :

$$\boxed{\begin{array}{c} f \in \mathcal{C}^2([a,b]) \\ f(a)f(b) < 0 \\ f' \text{ ne s'annule pas sur} [a,b]. \end{array}}$$

- Comme f' est continue sur $[a,b]$ et ne s'annule pas sur $[a,b]$ alors f' est de signe constant sur [a,b]. Quitte à changer de signe, on supposera :

$$\boxed{f' > 0.}$$

- Ainsi f est continue et strictement croissante sur $[a,b]$ et comme $f(a)f(b) < 0$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires :

$$\boxed{f \text{ admet un unique zéro noté } c \text{ dans } [a,b].}$$

On suppose également que :

$$\boxed{\begin{array}{c} f \text{ est convexe,} \\ x_0 \in [a,b] \text{ et } f(x_0) > 0. \end{array}}$$

On rappelle que, comme f est convexe :

$$\forall x, y \in [a,b],\ f(x) \geq f'(y)(x-y) + f(y).$$

1. Montrer que la suite (x_n) est bien définie et que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \in [c,b].$$

Indications :

- *Raisonner par récurrence.*
- *Avec des arguments de signes, montrer que $x_{n+1} < x_n \leq b$.*

- *Avec un argument de convexité, montrer que* $x_{n+1} \geq c$.

2. Montrer que (x_n) converge vers c.
   Indications :
   - *Montrer que* (x_n) *est décroissante et minorée.*
   - *Utiliser l'unicité du zéro de* f.
3. Posons :

$$g: \begin{array}{rcl} [a,b] & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - \frac{f(x)}{f'(x)} \end{array}$$

   (a) Montrer qu'il existe $K \in \mathbb{R}^{+*}$ tel que :

$$\forall x \in [c,b],\ \forall t \in [c,x],\ |g'(t)| \leq K|x-c|.$$

   Indications :
   - *Calculer* g'.
   - *Majorer* $|f''|$ *par une constante.*
   - *Minorer* $|f'$ *par une constante strictement positive.*
   - *Utiliser l'inégalité des accroissements finis pour majorer* $|f|$.

   (b) En déduire que :

$$\forall x \in [c,b],\ |g(x)-c| \leq K|x-c|^2,$$

   puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_{n+1}-c| \leq K|x_n - c|^2.$$

   Indications :
   - *Appliquer l'inégalité des accroissements finis à* g *en veillant bien à ce que* $|g'|$ *soit majorée par une constante.*
   - *Remarquer que* $x_{n+1} = g(x_n)$.

   Remarque :
   - On dit qu'une suite (x_n) convergeant vers c telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_{n+1}-c| \leq K|x_n - c|$$

     a une vitesse de convergence linéaire.
   - On dit qu'une suite (x_n) convergeant vers c telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_{n+1}-c| \leq K|x_n - c|^2$$

     a une vitesse de convergence quadratique.
   - La convergence quadratique est plus rapide que la convergence linéaire.
4. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - c| \leq \frac{1}{K}(K(b-a))^{2^n}.$$

   Indication :
   - *Raisonner par récurrence.*
5. Conclure.

   Remarque : Si $K(b-a) < 1$, on a donc une convergence très rapide. Il est donc intéressant, lors de l'application de la méthode de Newton de se placer sur un intervalle assez petit. Cet intervalle peut être obtenu en utilisant quelques itérations de la méthode de dichotomie.

II Programmation

Ecrire une fonction dont les arguments sont :

- f qui est la fonction f,
- fp qui est la fonction f',
- x0 qui est le terme x_0 d'initialisation de la méthode de Newton,
- epsilon qui représente la précision,

et qui renvoie le premier terme x_n de la suite définie par la méthode de Newton tel que $|f(x_n)| \leq \varepsilon$.