Corrigé : Comportement des racines d'une suite de polynômes.

1-a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$S_n' = \sum_{k=1}^{n} \frac{kX^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!}$$

Donc $\boxed{S_n' = S_{n-1}}$.

b) . Pour $n=0$

$S_0 = 1$ donc n est pair et S_0 n'a pas de racine réelle.

- Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que S_n n'a pas de racine réelle si n pair et une unique racine réelle si n est impair.
  - Si n est pair, $S_{n+1}' = S_n$

Or S_n est continue et ne s'annule pas donc est de signe constant, ainsi $S'_{n+1} > 0$

Donc S_{n+1} est strictement croissante.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} S_{n+1}(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} S_{n+1}(x) = -\infty$

(ces limites sont égales à la limite de $x \mapsto \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$)

Donc S_{n+1} admet une unique racine réelle.

. Si n est impair, alors S_n admet une unique racine réelle a. Comme S_n est continue, S_n est de signe constant sur $]-\infty, a[$ et sur $]a, +\infty[$.

Or $\lim\limits_{+\infty} S_n = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} S_n = -\infty$ d'où :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$S'_{n+1}(x) = S_n(x)$		$-$	0	$+$	
S_{n+1}		$\searrow$		$\nearrow$	

Or $S_{n+1}(a) = S_n(a) + \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} > 0$

car $n+1$ est pair et $a \neq 0$

Donc S_{n+1} ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

- On a donc montré par récurrence que :

$\boxed{\begin{array}{l} \text{. si } n \text{ pair, } S_n \text{ n'a pas de racine réelle} \\ \text{. si } n \text{ impair } S_n \text{ a une unique racine réelle} \end{array}}$

2-a) Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons α_n racine au moins double de P_n. Alors $P'_n(\alpha_n) = 0$

Or $P'_n = S'_{2n+1} = S_{2n}$, donc $S_{2n}(\alpha_n) = 0$

Ainsi α_n est racine de S_{2n} et $\alpha_n \in \mathbb{R}$ ce qui est absurde.

Donc $\boxed{\alpha_n \text{ est racine simple de } P_n}$

b-i) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$P_n = \sum_{l=0}^{2n+1} \frac{X^l}{l!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{X^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{n} \frac{X^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{X^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{n} \frac{X^{2j}}{(2j)!} \frac{X}{2j+1}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{X^{2j}}{(2j)!} \left(1 + \frac{X}{2j+1}\right)$$

Donc $\boxed{P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{2k}}{(2k)!} \left(1 + \frac{X}{2k+1}\right)}$

ii) Soit $n \in \mathbb{N}$,

D'après 1-b, P_n est strictement croissant.

Or :

$$. P_n(-1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{1}{2k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k)!} \left(1 - \frac{1}{2k+1}\right)$$

≥ 0 car $\forall k \in \mathbb{N}$, $1 - \frac{1}{2k+1} \geq 0$

$$. P_n(-(2n+1)) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2n+1)^{2k}}{(2k)!} \left(1 - \frac{2n+1}{2k+1}\right)$$

Or : $\forall l \in [\![0,n]\!]$ $1 - \frac{2n+1}{2l+1} \leq 0$

Donc $P_n(-(2n+1)) \leq 0$

. Comme $P_n(\alpha_n) = 0$, on a donc :

$$\boxed{-(2n+1) \leq \alpha_n \leq -1}$$

c) i) Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{n+1}(\alpha_n) = \sum_{l=0}^{2n+3} \frac{\alpha_n^l}{l!} = \sum_{l=0}^{2n+1} \frac{\alpha_n^l}{l!} + \frac{\alpha_n^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{\alpha_n^{2n+3}}{(2n+3)!}$$

$$= P_n(\alpha_n) + \frac{\alpha_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 + \frac{\alpha_n}{2n+3}\right)$$

Donc $$\boxed{P_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 + \frac{\alpha_n}{2n+3}\right)}$$

ii) On a : $\alpha_n^{2n+2} > 0$ et $\alpha_n \geq -(2n+3)$

donc $1 + \frac{\alpha_n}{2n+3} \geq 0$

Ainsi $P_{n+1}(\alpha_n) \geq 0 = P_{n+1}(\alpha_{n+1})$

Or P_{n+1} est strictement croissant.

Donc $\alpha_n \geq \alpha_{n+1}$.

Ainsi $\boxed{(\alpha_n) \text{ est décroissante.}}$

d) i) Soit $n \in \mathbb{N}$, P_n est dérivable sur $[l,0]$ et :

$\forall x \in [l,0]$, $|P_n'(x)| = |S_{2n}(x)|$

$$\leq \sum_{l=0}^{2n} \frac{|x|^l}{l!} \leq \sum_{l=0}^{2n} \frac{(-l)^l}{l!}$$

car $l \leq 0$ donc $|x| = -x \leq -l$

$|P_n'(x)| \leq S_{2n}(-l)$

$\leq \lim\limits_{n \to +\infty} S_{2n}(-l)$ car la suite $(S_{2n}(-l))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante

$\leq e^{-l}$ d'après le résultat admis.

. Donc, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à $\alpha_n, l \in [l,0]$, on a :

$$|P_n(\alpha_n) - P_n(l)| \leq e^{-l}|\alpha_n - l|$$

Or (α_n) est décroissante donc :

$$\boxed{|P_n(\alpha_n) - P_n(l)| \leq e^{-l}(\alpha_n - l)}$$

ii) On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n - l) = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (P_n(\alpha_n) - P_n(l)) = 0$

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n(l) = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{l=0}^{2n+1} \frac{l^l}{l!} = e^l$

Donc $$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n(\alpha_n) = e^l}$$

iii) On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(\alpha_n) = 0$, donc $e^l = 0$

ce qui est absurde.

e) (α_n) est décroissante et divergente, donc :

$$\boxed{\lim \alpha_n = -\infty}$$

3-a) i)

On a : $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = \left|\sum_{i=1}^{n} \theta_i \alpha_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} \theta_i |\alpha_i| \leq \sum_{i=1}^{n} \theta_i$

Donc $\sum_{i=1}^{n} \theta_i |\alpha_i| = \sum_{i=1}^{n} \theta_i$.

Ainsi $\sum_{i=1}^{n} \theta_i (|\alpha_i| - 1) = 0$

Or : $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \theta_i(|\alpha_i|-1) \leq 0$

Donc : $\forall i \in [\![1,p]\!],\ \theta_i(|\alpha_i|-1) = 0$

D'où : $\boxed{\forall i \in [\![1,p]\!],\ |\alpha_i| = 1.}$

ii) $|\theta_1 + \theta_2 e^{it}|^2 = (\theta_1+\theta_2\cos t)^2 + (\theta_2 \sin t)^2$

$= \theta_1^2 + \theta_2^2 + 2\theta_2\theta_1 \cos t$

Or $|\sum_{i=1}^{p} \theta_i \alpha_i| = \sum_{i=1}^{p}\theta_i$ donc :

$|\theta_1 + \theta_2 e^{it}| = \theta_1+\theta_2$, ainsi, en élevant au carré :

$\theta_1^2 + \theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2 \cos t = \theta_1^2+\theta_2^2+2\theta_1\theta_2$.

Donc $\cos t = 1$, ainsi $e^{it} = 1$. D'où $\boxed{\alpha_2 = 1.}$

iii) Posons : $\forall k \in [\![1,p]\!],\ \alpha_k = e^{it_k}$.

$|\sum_{k=1}^{p}\theta_k e^{it_k}|^2 = \sum_{k=1}^{p}\theta_k e^{it_k} \cdot \sum_{l=1}^{p}\theta_l e^{-it_l}$

$= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{p}\theta_k\theta_l e^{i(t_k-t_l)}$

$= \sum_{k=1}^{p}\Big(\sum_{l=1}^{k-1}\theta_k\theta_l e^{i(t_k-t_l)}$

$+ \theta_k^2 + \sum_{l=k+1}^{p}\theta_k\theta_l e^{i(t_k-t_l)}\Big)$

$= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{k-1}\theta_k\theta_l e^{i(t_k-t_l)} + \sum_{l=1}^{p}\theta_l^2$

$+ \sum_{l=1}^{p}\sum_{k=1}^{l-1}\theta_k\theta_l e^{i(t_k-t_l)}$

$= \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{k-1}\theta_k\theta_l(e^{i(t_k-t_l)} + e^{i(t_l-t_k)})$

$+ \sum_{k=1}^{p}\theta_k^2$

$|\sum_{k=1}^{p}\theta_k e^{it_k}|^2 = 2\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{k-1}\theta_k\theta_l \cos(t_k-t_l)$

$+ \sum_{l=1}^{p}\theta_l^2$

Or $(\sum_{l=1}^{p}\theta_l)^2 = |\sum_{l=1}^{p} \theta_l e^{i0}|^2$

$= 2\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{k-1}\theta_k\theta_l + \sum_{k=1}^{p}\theta_k^2$

Donc, $\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{k-1}\underbrace{\theta_k\theta_l(\cos(t_k-t_l)-1)}_{\leq 0} = 0$

Donc $\forall k \in [\![1,p]\!], \forall l \in [\![1,k-1]\!],\ \cos(t_k-t_l) = 1$

donc $e^{i(t_k-t_l)} = 1$ donc $e^{it_k} = e^{it_l}$

Ainsi $\forall 1 \leq l < k \leq p,\ \alpha_k = \alpha_l$.

D'où $\boxed{\alpha_1 = \dots = \alpha_p}$

b-i) $P(0) = a_0 > 0$, $P(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k > 0$

Donc $\boxed{\text{0 et 1 ne sont pas racines de } P}$

ii) $(X-1)P(X) = (X-1)\sum_{l=0}^{n} a_l X^l$

$= \sum_{l=0}^{n} a_l X^{l+1} - \sum_{l=0}^{n} a_l X^l$

$= \sum_{l=1}^{n+1} a_{l-1}X^l - \sum_{l=0}^{n} a_l X^l$

Donc $\boxed{(X-1)P(X) = a_n X^{n+1} + \sum_{l=1}^{n}(a_{l-1}-a_l)X^l - a_0}$

iii) Supposons que P admette une racine α de module ≤ 1.

Alors α est racine de $(X-1)P(X)$

Donc $a_n \alpha^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} (a_{k-1} - a_k)\alpha^k - a_0 = 0$

D'où $a_n \alpha^{n+1} + \sum_{k=2}^{n} (a_{k-1} - a_k)\alpha^k = a_0$. (car $a_0 = a_1$)

Posons. $\forall k \in [\![2, n]\!]$, $\theta_k = a_{k-1} - a_k > 0$

$\theta_{n+1} = a_n > 0$

$\forall k \in [\![2, n+1]\!]$, $\alpha_k = \alpha^k$

On a : $\sum_{k=2}^{n+1} \theta_k \alpha_k = a_0$ et $\forall k \in [\![2, n+1]\!]$, $|\alpha_k| \leq 1$.

De plus $\sum_{k=2}^{n+1} \theta_k = a_n + \sum_{k=2}^{n} (a_{k-1} - a_k)$

$= a_n + (a_1 - a_n) = a_1 = a_0$

Donc $\sum_{k=2}^{n+1} \theta_k \alpha_k = \sum_{k=2}^{n+1} \theta_k$.

Donc, d'après 3-a-iii)

$\alpha_2 = \alpha_3 \dots = \alpha_{n+1}$

Donc $\alpha^2 = \alpha^3 = \dots = \alpha^{n+1}$, ainsi $\alpha = 0$ ou 1

ce qui est absurde car 0 et 1 ne sont pas racines de P.

Ainsi, $\boxed{\text{les racines de } P \text{ ont un module} > 1}$

c) Soit α une racine de Q. Comme $Q(0) = a_0 \neq 0$,

alors $\alpha \neq 0$.

On a $Q(\alpha) = 0$, donc $\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^k = 0$

Ainsi, en divisant par α^n, $\sum_{k=0}^{n} a_k \alpha^{k-n} = 0$

D'où $\sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \alpha^{-k} = 0$

Posons $P = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k$, alors $\frac{1}{\alpha}$ est racine de P.

Or : $a_{n-0} = a_{n-1} > a_{n-2} > \dots > a_{n-(n-1)} > a_{n-n} > 0$

Donc, d'après 3.b) $\left|\frac{1}{\alpha}\right| > 1$

Ainsi $\boxed{|\alpha| < 1}$

d) Soit α une racine de S_n.

On a : $\sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha^k}{k!} = 0$

Donc : $\sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} \left(\frac{\alpha}{n}\right)^k = 0$

Posons $Q = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} X^k$, alors $\frac{\alpha}{n}$ est racine de Q

Posons $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = \frac{n^k}{k!} > 0$

De plus $a_n = \frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n^{n-1}}{n \cdot (n-1)!} = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} = a_{n-1}$.

Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$,

$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{n^k}{k!} \frac{(k+1)!}{n^{k+1}} = \frac{k+1}{n} < 1$ donc $a_k < a_{k+1}$.

Ainsi, d'après c, $\left|\frac{\alpha}{n}\right| < 1$.

Donc : $\boxed{|\alpha| < n}$.