Comportement des racines d'une suite de polynômes

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}.$$

Dans ce problème, on confondra un polynôme et la fonction polynomiale qui lui est associée et on admettra que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$

1. (a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n' = S_{n-1}.$$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que le polynôme S_n n'a pas de racine réelle si n est pair et a une unique racine réelle si n est impair. (On pourra faire une démonstration par récurrence.)

   On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{X^k}{k!}.$$

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note α_n l'unique racine réelle de P_n.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que α_n est racine simple de P_n.
   (b) i. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^{2k}}{(2k)!}\left(1 + \frac{X}{2k+1}\right).$$

   ii. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ -(2n+1) \le \alpha_n \le -1.$$

   (c) i. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P_{n+1}(\alpha_n) = \frac{\alpha_n^{2n+2}}{(2n+2)!}\left(1 + \frac{\alpha_n}{2n+3}\right).$$

   ii. En déduire que la suite (α_n) est décroissante.
   (d) On suppose, dans cette question, que la suite (α_n) est convergente de limite $l \in \mathbb{R}$.
   i. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |P_n(\alpha_n) - P_n(l)| \le e^{-l}(\alpha_n - l).$$

   ii. En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} P_n(\alpha_n) = e^l.$$

   iii. Aboutir à une contradiction.
   (e) En déduire la nature et la limite de la suite (α_n).
3. Le but de cette question est de montrer que, si $n \ge 2$, les racines complexes du polynôme S_n ont un module $< n$.
   (a) Soit p un entier naturel non nul. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ des nombres complexes de module ≤ 1. Soient $\theta_1, \dots, \theta_p$ des nombres réels > 0. On suppose que :

$$\left|\sum_{i=1}^{p} \theta_i \alpha_i\right| = \sum_{i=1}^{p} \theta_i.$$

   i. Démontrer que $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ sont des nombres complexes de module exactement 1.
   ii. On suppose dans cette question seulement $p = 2$ et $\alpha_1 = 1$. Soit t un nombre réel tel que $\alpha_2 = e^{\imath t}$. En développant $\left|\theta_1 + \theta_2 e^{\imath t}\right|^2$, justifier que $\alpha_2 = 1$.
   iii. (*) Dans le cas général, démontrer que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p$.
   (b) Soit P dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \ge 2$. On note $a_0, \dots, a_n$ ses coefficients :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

   On suppose que $a_0 = a_1 > a_2 > \cdots > a_{n-1} > a_n > 0$.
   i. Justifier que ni 0, ni 1, ne sont des racines de P.
   ii. Déterminer les coefficients du polynôme $(X-1)P(X)$.
   iii. Démontrer que les racines complexes de P ont un module > 1. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser la question 3.(a)iii.*
   (c) Soit Q dans $\mathbb{R}[X]$ de degré $n \ge 2$. Soient $a_0, \dots, a_n$ ses coefficients :

$$Q(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

   On suppose que $0 < a_0 < a_1 < \cdots a_{n-2} < a_{n-1} = a_n$. Justifier que les racines complexes de Q ont un module < 1.
   (d) Conclure.