Compléments : Equations différentielles

Corollaire 2

Soit $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Il existe une unique solution de l'équation $y' + a(x)y = 0$ telle que $y(x_0) = y_0$ qui est : $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \end{array}$.

Preuve. Posons $A : I \to \mathbb{K}$, $x \mapsto \int_{x_0}^{x} a(t)dt$, alors A est une primitive de a.
Soit y une solution de $y' + a(x)y = 0$, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall x \in I,\ y(x) = \lambda e^{-A(x)} = \lambda e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt}.$$

De plus :

$$y(x_0) = y_0 \iff \lambda e^{-\int_{x_0}^{x_0} a(t)dt} = y_0 \iff \lambda e^0 = y_0 \iff \lambda = y_0.$$

Ainsi, l'équation $y' + a(x)y = 0$ admet une unique solution telle que $y(x_0) = y_0$ qui est : $\begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & y_0 e^{-\int_{x_0}^{x} a(t)dt} \end{array}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

□

Proposition 4

Soit (E) l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ où a et b sont continues sur I. Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$ de (E) telle que $y(x_0) = y_0$.

Preuve. Soit A une primitive de a sur I.
Soit y_P une solution particulière de (E).
Soit y une solution de (E), il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :

$$\forall x \in I,\ y(x) = y_P(x) + \lambda e^{-A(x)}.$$

De plus :

$$\begin{aligned} y(x_0) = y_0 &\iff y_P(x_0) + \lambda e^{-A(x_0)} = y_0 \\ &\iff \lambda = e^{A(x_0)}(y_0 - y_P(x_0)) \end{aligned}$$

Ainsi, il y a existence et unicité de λ, donc de la solution cherchée.

□

Proposition 10

Soit (E) l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = f(x)$ où $a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, et f continue sur I.
Soient $x_0 \in I$ et $y_0, y'_0 \in \mathbb{K}$.
Il existe une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$ de (E) telle que $\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$.

Preuve. Soit r une racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$. Soit $y : I \to \mathbb{K}$ deux fois dérivable. Posons $z : \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & e^{-rx}y(x) \end{array}$.
En reprenant les résultats de la preuve de la proposition 7, ona :

$$ay'' + by' + cy = f(x) \iff Z' + \frac{2ar+b}{a} Z = \frac{f(x)e^{-rx}}{a},$$

avec $Z = z'$.
De plus :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases} &\iff \begin{cases} z(x_0) = y_0 e^{-rx_0} \\ z'(x_0)e^{rx_0} + rz(x_0)e^{rx_0} = y'_0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z(x_0) = y_0 e^{-rx_0} \\ z'(x_0) = y'_0 e^{-rx_0} - rz(x_0) \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} z(x_0) = y_0 e^{-rx_0} \\ Z(x_0) = y'_0 e^{-rx_0} - ry_0 e^{-rx_0} \end{cases} \end{aligned}$$

Soit Z_0 l'unique solution de $Z' + \frac{2ar+b}{a} Z = \frac{f(x)e^{-rx}}{a}$ telle que : $Z(x_0) = y_0' e^{-rx_0} - r y_0 e^{-rx_0}$. On a donc :

$$\left\{\begin{array}{l} ay'' + by' + cy = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z(x_0) = y_0 e^{-rx_0} \\ Z = Z_0 \end{array}\right.$$

Soit z_0 l'unique primitive de Z_0 telle que $z(x_0) = y_0 e^{-rx_0}$, on a donc :

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{l} ay'' + by' + cy = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_0' \end{array}\right. &\iff z = z_0 \\ &\iff \forall x \in I,\ y(x) = z_0(x)e^{rx}. \end{aligned}$$

D'où l'unicité de y. □