Exercices du chapitre 11 : Calcul matriciel et systèmes linéaires

Dans toute la feuille $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Ensemble de matrices

Exercice 1 : Résoudre l'équation $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2 : Soit $t \in \mathbb{R}$, soit $A = \begin{pmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$A^2 = aA + bI_3.$$

Exercice 3 : (⋆⋆)
Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soient $r, s, i, j \in [\![1, n]\!]$. Calculer le terme (i, j) de $AE_{r,s}B$.
2. On suppose que :
$$\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AXB = 0_n.$$
Montrer que A ou B est nulle.

Exercice 4 : (⋆⋆)
Déterminer :

$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\}.$$

Exercice 5 : (⋆⋆)
Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle trace de M et on note $\mathrm{tr}(M)$ le nombre :

$$\mathrm{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}.$$

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, montrer que :
$$\mathrm{tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mu \mathrm{tr}(B).$$
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que :
$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$
3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :
$$\mathrm{tr}(A^T A) = 0 \Longleftrightarrow A = 0_n.$$
4. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, montrer que :
$$(\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{tr}(AM) = \mathrm{tr}(BM)) \Longleftrightarrow A = B.$$

II Opérations élémentaires

Exercice 6 : (⋆⋆) On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -2 & -2 \\ 2 & -6 & -6 & -4 & -2 \\ -3 & 12 & 12 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'on peut, en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes de A, obtenir la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

III Systèmes linéaires

Exercice 7 :
Résoudre les systèmess suivant d'inconnues $x, y, z, t \in \mathbb{R}$:

1. $\begin{cases} x + y - z + t = 2 \\ 2x - 2y + z - 3t = 1 \\ -x + y + z - 2t = -2 \end{cases}$,
2. $\begin{cases} 3x + 4y + z + 2t = 3 \\ 6x + 8y + 2z + 6t = 7 \\ 9x + 12y + 3z + 10t = 0 \end{cases}$.

Exercice 8 :
Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes suivants d'inconnues x, y, z ou x, y, z, t :

1. $\begin{cases} 2x+y-3z=a \\ 3x+2y+z=a+3 \\ 7x+4y-5z=2a+5 \end{cases}$,

2. $\begin{cases} x+2y-z+t=1 \\ x+3y+z-t=1 \\ -x+y+7z+2t=1 \\ 2x+y-8z+t=a \end{cases}$.

Exercice 9 : ($\star$)
Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes suivants d'inconnues x, y, z, t :

1. $\begin{cases} 2x-y+z+t=1 \\ x+2y-z+4t=2 \\ x+7y-4z+11t=m \end{cases}$,

2. $\begin{cases} mx+y+z+t=1 \\ x+my+z+t=m \\ x+y+mz+t=m+1 \end{cases}$.

IV Ensemble des matrices carrées

Exercice 10 : ($\star\star$)
On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 :
On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sin\theta \\ -1 & 0 & \cos\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^3. En déduire $(I_3 + A)^n$ pour $n \geq 3$.

Exercice 12 :
Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$ avec :

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$,
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Exercice 13 :
Calculer A^p, $p \in \mathbb{N}$, où :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 14 : ($\star\star$) Soient (x_n), (y_n) et (z_n) définies par x_0, y_0, $z_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} x_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ y_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{2}{3}y_n + \frac{1}{6}z_n \\ z_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{6}y_n + \frac{2}{3}z_n \end{cases}.$$

Etudier la convergence de ces trois suites.

Exercice 15 : ($\star\star$)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{C}$ et soit :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $M_{a,b}^k$.

Exercice 16 : Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices symétriques soit symétrique.
Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le produit de deux matrices antisymétriques soit antisymétrique.

Exercice 17 : ($\star\star$)
Montrer que toute matrice carrée se décompose de façon unique comme la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

V Matrices inversibles

Exercice 18 :
Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, telle que $A^n + A^{n-1} = I_n$.
Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 19 :
On pose :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $A^3 - 4A^2 + 5A$.

2. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de A^2, A et I_3.

Exercice 20 : $(\star\star)$
Soit $t \in \mathbb{K}$, on considère les matrices $A = (a_{i,j}), B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ définies par :

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ a_{i,j} = \begin{cases} t^{j-i}\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j, \end{cases}$$

$$\forall i, j \in [\![1, n]\!],\ b_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{i+j}t^{j-i}\begin{pmatrix} j \\ i \end{pmatrix} & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j, \end{cases}$$

Montrer que A et B sont inverses l'une de l'autre.

Exercice 21 : $(\star\star)$
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{K})$ tel que $A^T = P^{-1}AP$.

Exercice 22 : $(\star\star)$
Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$ tel que $A + A^{-1} = I_n$.
On utilise la notation suivante :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ A^{-k} = (A^{-1})^k.$$

Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \exists u_k \in \mathbb{R},\ A^k + A^{-k} = u_k I_n,$$

et calculer u_k pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 23 : $(\star\star)$

1. Déterminer :
$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \forall A \in GL_n(\mathbb{K}),\ AM = MA\}.$$
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que :
$$\forall M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ A = MN \Longrightarrow A = NM.$$
Montrer que A est une matrice scalaire.

Exercice 24 : Inverser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 25 : $(\star)$
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer la matrice :
$$D = P^{-1}AP$$
ainsi que ses puissances n, $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire A^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 26 : $(\star)$
On pose :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$ ainsi que D^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.