Exercices du chapitre 12 : Limites et continuité

I Limite d'une fonction en un point

Exercice 1 :
Etudier les limites suivantes :
1. $\dfrac{x^3+x^2+5}{5x^3-x+2}$ en $+\infty$,
2. $\sqrt{x^2+2x}-x$ en $+\infty$,
3. $\dfrac{\tan 5x}{\sin x}$ en 0,
4. $\dfrac{e^{3x}+2x+7}{e^x+e^{-x}}$ en $+\infty$,
5. $\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$ en $+\infty$.

Exercice 2 :
Etudier les limites suivantes :
1. $\dfrac{x^2+1}{\sin^2 x}$ en 0,
2. $\dfrac{\sin x-\sin 5x}{\sin x+\sin 5x}$ en 0,
3. $\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ en 0,
4. $\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}+1}$ en 0,
5. $\dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x^2-a^2}$ en $a\neq 0$.

Exercice 3 : $(\star)$
Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ périodique telle que : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$ où $a\in\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

Exercice 4 : $(\star\star)$
On considère la fonction :

$$f:\begin{array}{rcl}\mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \frac{(-1)^{\lfloor 1/x\rfloor}}{x}\end{array}.$$

Montrer que f n'admet pas de limite finie en 0.
A-t-on $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\pm\infty$?

Exercice 5 : On pose :

$$f : x \to x\lfloor\frac{1}{x}\rfloor.$$

Etudier la limite de f en :
1. 0,
2. 2,
3. $\dfrac{1}{2}$,
4. $\dfrac{2}{3}$,
5. $+\infty$.

Exercice 6 :
Calculer :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\lfloor x\rfloor}{x+\lfloor x\rfloor}$$

Exercice 7 : $(\star)$
Déterminer si elle existe, la limite en a de f fonction définie sur I où :
1. $I=\mathbb{R}^*$, $f(x)=\sin x\cos\frac{1}{x}$, $a=0$,
2. $I=\mathbb{R}^*$, $f(x)=\cos x\sin\frac{1}{x}$, $a=0$,
3. $I=[0,\frac{\pi}{2}[$, $f(x)=\cos x+\lfloor\tan x\rfloor$, $a=\frac{\pi}{2}$,
4. $I=[0,\pi]\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$, $f(x)=\cos x+\lfloor\tan x\rfloor$, $a=\frac{\pi}{2}$.

II Continuité en un point

Exercice 8 :
Etudier la continuité des applications définies par :
1. $f(x)=x-\lfloor x\rfloor-(x-\lfloor x\rfloor)^2$,
2. $f(x)=(-1)^{\lfloor x\rfloor}(x-\lfloor x\rfloor-\frac{1}{2})$,
3. $f(x)=\begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x\neq 0\\ 0 \text{ si } x=0\end{cases}$.
4. $f(x)=\begin{cases} \frac{\exp(\mathrm{Arctan}\, x)-1}{x} \text{ si } x\neq 0\\ 1 \text{ si } x=0\end{cases}$.

Exercice 9 : ($\star$)
Déterminer si les fonctions suivantes sont prolongeables par continuité en 0 :

1. $f(x) = x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$,
2. $f(x) = \frac{|x|}{x}$,
3. $f(x) = \exp(\frac{1}{x})$,
4. $f(x) = (1+x)^{1/x}$,
5. $f(x) = \cos(\frac{1}{x})$,
6. $f(x) = x\cos(\frac{1}{x})$.

Exercice 10 : ($\star$)
Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues en 0 telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(3x) = f(x).$$

Exercice 11 : ($\star\star$)

1. Montrer que si f et g sont continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et coïncident sur $\mathbb{Q}$, alors $f = g$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in \mathbb{Q},\ f(x) < g(x)$.
   (a) Montrer que $f \leq g$.
   (b) Montrer qu'on n'a pas nécessairement : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < g(x)$.

III Continuité sur un intervalle

Exercice 12 :
Montrer que l'équation $x^{17} = x^{11} + 1$ admet au moins une solution $x \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 13 : ($\star$)
Soient $f, g \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$. Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^+, \exists x \in [0,1],\ f(x) = \lambda g(x).$$

Exercice 14 : ($\star$)
Soient $a < b$ et soit $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que :

$$f(a) - 2f(c) + f(b) = 0.$$

Exercice 15 : ($\star$)
Déterminer toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)^2 = f(x)$$

Exercice 16 : ($\star$)
Soit f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que :

$$f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right).$$

Exercice 17 : ($\star\star$)
Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ continue. On suppose que :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = l < 1.$$

Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}^+$ tel que :

$$f(c) = c.$$

Exercice 18 : ($\star\star$)
Soit $f \in \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1)$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists x \in [0,1],\ f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x).$$

Exercice 19 : ($\star\star$)
Soit f une application de d'intervalle I dans $\mathbb{R}$ continue et injective.
Montrer que f est monotone.

Exercice 20 : ($\star$)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, bornée sur $\mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$. Montrer que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21 : ($\star\star$)
Soit $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$ continue telle que :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Montrer que f admet un minimum sur sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 22 : ($\star$)
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in \mathbb{R} \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}.$$

Montrer que f est bornée.

Exercice 23 : ($\star\star$)
Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que :

$$\sup_{x \in]a,b[} f(x) = \sup_{x \in [a,b]} f(x) \text{ et } \inf_{x \in]a,b[} f(x) = \inf_{x \in [a,b]} f(x).$$

Exercice 24 : (⋆⋆)
Soient f et g deux fonctions continues de $[-1,1]$ dans $\mathbb{R}$.
On définit pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $M(x) = \sup_{t\in[-1,1]} (f(t) + xg(t))$

1. Montrer que $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bien définie.
2. Montrer que :
$$\forall h > 0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \ M(x+h) \leq M(x) + h \sup_{t\in[-1,1]} g \quad \text{et} \quad M(x+h) \geq M(x) + h \inf_{t\in[-1,1]} g.$$
3. Montrer qu'il existe $K \geq 0$ tel que : pour tout $(a,x) \in \mathbb{R}^2$, $|M(x) - M(a)| \leq K|x-a|$. En déduire que $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continue.

Exercice 25 : (⋆)
On considère la fonction suivante :
$$f : \begin{array}{ccc}]0,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}. \end{array}$$

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer :
$$\lim_{n\to+\infty} f^{-1}(2^{-n}).$$

Exercice 26 : (⋆)
Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$.

1. Comparer $f(\frac{1}{x})$ et $f(x)$.
2. On désigne par φ la restriction de f à $]-1,1[$. Montrer que φ est une bijection de $]-1,1[$ dans $\mathbb{R}$.
3. Déterminer la fonction $\varphi^{-1} \circ f$.

Exercice 27 : (⋆⋆)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} x-1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ x+1 \text{ si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}.$$
Montrer que f est bijective et discontinue en tout point de $\mathbb{R}$.