Exercices du chapitre 13 : Dérivabilité

I Nombre dérivé, fonction dérivée

Exercice 1 :
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, soient $a \in I$ et $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ dérivable en a. Calculer :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h}.$$

Exercice 2 : ($\star$)
Soit $f \in \mathcal{F}(]-1,1[,\mathbb{R})$ dérivable en 0, soient (a_n) et (b_n) des suites convergeant vers 0 et telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-1 < a_n < 0 < b_n < 1$. Montrer que la suite $\left(\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n}\right)$ converge vers $f'(0)$.

Exercice 3 : ($\star$)
Soit f la fonction définie sur $]-1,1[$ par : $f(x) = \frac{x}{\ln|x|}\cos\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$.
2. On considère les suites définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi},\ v_n = \frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2n\pi}.$$
Calculer les limites des suites $(f'(u_n))$ et $(f'(v_n))$.
3. En déduire que la fonction f' n'est pas bornée au voisinage de 0.

Exercice 4 : ($\star$)
Etudier la dérivabilité en 0 des fonctions suivantes :

1. $f_1 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^{n+1}+x^n}$, où $n \in \mathbb{N}^*$,
2. $f_2 : x \mapsto \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$,
3. $f_3 : x \mapsto \begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Exercice 5 :
On considère la fonction définie par :

$$\forall x \in \left[\frac{\pi}{2},\pi\right[,\ f(x) = \frac{1}{\sin(x)}.$$

1. Montrer que f réalise une bijection vers un intervalle que l'on précisera.
2. Sans déterminer f^{-1}, montrer que f^{-1} est dérivable sur un intervalle que l'on précisera et calculer $(f^{-1})'$.

II Propriétés des fonctions dérivables

Exercice 6 :
Soit $T \in \mathbb{R}^*$. Soit f une fonction dérivable et T-périodique.
Montrer que f' s'annule une infinité de fois.

Exercice 7 :
Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[-1,1]$ et deux fois dérivable sur $]-1,1[$ telle que $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$. Montrer que :

$$\exists c \in]-1,1[,\ f''(c) = 0.$$

Exercice 8 : ($\star$)
Soient $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$, soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$. Montrer que :

$$\exists c \in]a,b[,\ f'(c) = -\lambda\frac{f(c)}{c}.$$

Exercice 9 : ($\star$) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, soient $f, g \in \mathcal{F}([a,b],\mathbb{R})$ continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que :

$$(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c).$$

Exercice 10 : ($\star\star$)
Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$ et dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a).$$

On pose :

$$g : \begin{array}{ccl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f\left(\frac{1}{x}+a-1\right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(a) & \text{si } x = 0. \end{cases} \end{array}$$

1. Montrer que g est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur $]0,1[$.

2. En déduire qu'il existe $c \in]a, +\infty[$ tel que :

$$f'(c) = 0.$$

Exercice 11 : (★★)

Soit f une application définie et continue sur $[a, +\infty[$, dérivable sur $]a, +\infty[$ telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$. Montrer que :

$$\exists x_0 \in]a, +\infty[, \ f'(x_0) = 0.$$

Exercice 12 : (★) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soient $n, k, l \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq l \leq k$ et $0 \leq l \leq n$, soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ n fois dérivable sur I. On suppose que f admet au moins k zéros dans I. Montrer que $f^{(l)}$ admet au moins $k - l$ zéros dans I.

Exercice 13 : (★★)

1. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur $]a, b[$. Montrer que :

$$\exists c \in]a, b[, \ f'(c)(g(b) - g(a)) = g'(c)(f(b) - f(a)).$$

2. En déduire la règle de L'Hôpital : si f et g sont deux fonctions continues sur $V =]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ et dérivables sur $V \setminus \{x_0\}$, telles que $f(x_0) = g(x_0) = 0$, et : $\forall x \in V \setminus \{x_0\}$, $g'(x) \neq 0$. Montrer que :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = l.$$

3. Application : calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{x^2}.$$

Exercice 14 : Montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \frac{1}{k+1} \leq \ln \frac{k+1}{k} \leq \frac{1}{k}.$$

Exercice 15 : (★) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c > 0$ tel que :

$$f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c)).$$

Exercice 16 : (★)

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \ \left(\frac{1 + x}{x}\right)^x \leq e \leq \left(\frac{1 + x}{x}\right)^{x+1}.$$

En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \frac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}.$$

Exercice 17 :

1. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2} \sin u_n.$$

   Etudier la convergence de (u_n).

2. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 \in \mathbb{R}, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ u_{n+1} = \cos u_n.$$

   Etudier la convergence de (u_n).

Exercice 18 : (★)

Montrer les inégalités suivantes :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, \ x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0,$
2. $\forall x \in]-1, +\infty[, \ \frac{x}{1+x} \leq \ln(1 + x) \leq x,$
3. $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \ x \cos x < \frac{\pi^2}{16},$
4. $\forall (x, y) \in [0, 1[^2, \ x < y, \ \frac{y-x}{\sqrt{1-x^2}} < \operatorname{Arcsin} y - \operatorname{Arcsin} x < \frac{y-x}{\sqrt{1-y^2}}.$

Exercice 19 : Soit :

$$f : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^{-1/x^2} \end{array}$$

Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et que son prolongement par continuité en 0 est dérivable en 0.

Exercice 20 : (★★)

Résoudre l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$:

$$x(x - 1)y' + (2x - 1)y = 1.$$

Exercice 21 : (★★) Résoudre l'équation différentielle suivante en utilisant la méthode de variation de la constante :

$$xy' - 2y - x^4 = 0.$$

Exercice 22 : (★★)

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$$y'' + y = |x| + 1.$$

III Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Exercice 23 :
Soit $n > 2$, calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & (x^2+1)e^{2x} \end{array}.$$

Exercice 24 : Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ième}}$ de :

1. $f_1 : x \mapsto \cos^3 x$,
2. $f_2 : x \mapsto e^x \sin x$,
3. $f_3 : x \mapsto (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$.

Exercice 25 : (⋆⋆)
Calculer la dérivée $n^{\text{ième}}$ de $f : x \mapsto x^n (1+x)^n$.
En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

Exercice 26 : (⋆⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la dérivée $(n+1)$-ième de :

$$f_n : x \mapsto x^n e^{1/x}.$$

Exercice 27 : (⋆⋆)
Soit $f \in \mathcal{C}^\infty([0,1])$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ |f^{(n)}(x)| \leq x.$$

Montrer que f est la fonction constante nulle.

IV Fonctions convexes

Exercice 28 :
Montrer que :

$$\forall x, y \in]1, +\infty[,\ \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

Exercice 29 : (⋆)

1. Soit f une fonction convexe et majorée sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.
2. Donner un exemple de fonction convexe et majorée sur $]0, +\infty[$ et qui ne soit pas constante.

Exercice 30 : (⋆⋆)
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ convexe. Posons :

$$g : \begin{array}{rcl} [0, \frac{1}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) + f(1-x). \end{array}$$

Montrer que g est décroissante.

Exercice 31 : (⋆⋆)
Déterminer toutes les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ telle que f soit convexe et concave (c'est-à-dire telle que $-f$ soit convexe).

Exercice 32 : (⋆ ⋆ ⋆)

1. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in I$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

   Montrer l'inégalité de Jensen :

   $$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k).$$

2. Applications :
   (a) Montrer que, pour tout $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^+$:

   $$a_1 a_2^2 a_3^3 \leq \left(\frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3}{6}\right)^6.$$

   (b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \dots, a_n \in]0,1]$ tels que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Montrer que :

   $$\sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \frac{1}{a_i}\right)^2 \geq \frac{(n^2+1)^2}{n}.$$