

I L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1 : (★)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose : $P = \sum_{k=0}^n X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^n (-1)^k X^k$. Calculer :

$$\deg(P + Q).$$

2. Soit $n \geq 2$, on pose : $P = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 X^k$ et $Q = X^n + (-1)^n n^2 X^{n-1} + X^{n-2}$. Calculer :

$$\deg(P - Q).$$

Exercice 2 : (★) Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$P(X^2) = (X^2 + 1)P(X).$$

II Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 3 :


Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que :

$$X^2 | (X+1)^n - nX - 1.$$

Exercice 4 : (★★) Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P - X$ divise $P \circ P - X$.

En déduire les solutions $x \in \mathbb{R}$ de :

$$(x^2 - 3x + 1)^2 = 3x^2 - 8x + 2.$$

Exercice 5 :  Effectuer la division euclidienne de A par B avec :

1. $A = X^4 + 2X^3 - X + 6$, $B = X^3 - 6X^2 + X + 4$,

2. $A = iX^3 - X^2 + 1 - i$, $B = (1 + i)X^2 - iX + 3$,

Exercice 6 :  Effectuer la division euclidienne de A par B avec :

1. $A = 2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$, $B = X^2 - 3X + 1$,

2. $A = X^3 - iX^2 - X$, $B = X - 1 + i$,

Exercice 7 : (★)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $A = X^{2n} - X^2 + 1$ et $B = X^2 - X$.

Déterminer le reste de la division euclidienne de A par B .

Exercice 8 : (★★)

Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}^*$, q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de n par p et soit $a \in \mathbb{K}^*$.

1. Montrer que le reste de la division euclidienne de X^n par $X^p - a$ est $a^q X^r$.

2. Calculer le reste de la division euclidienne de $X^n - a^n$ par $X^p - a^p$.

3. Calculer le reste de la division euclidienne de $X^{12} + 8X^{11} + 5X^6 - 3X^4 + X^2 - 5$ par $X^3 - 1$.

III Evaluation polynomiale et racines

Exercice 9 :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$X^2 - 3X + 2 | (X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1.$$

Exercice 10 : (★)

Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$X^2 + 1 | X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 1.$$

Exercice 11 : (★★)

Résoudre l'équation d'inconnues $P, Q \in \mathbb{C}[X]$:

$$(X^2 - 5X + 7)P + (X - 2)Q = (2X - 3).$$

Exercice 12 : (★★)

On définit une suite de polynômes par :

$$T_0 = 1, T_1 = X,$$



$$\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

1. Déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n .



2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que T_n est l'unique polynôme vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta).$$

3. Déterminer les racines de T_n .

Exercice 13 :  

Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ dont la fonction polynomiale associée est périodique.

Exercice 14 :  

Soit (S) le système :


$$\begin{cases} 3x + 4xy + 3y = -5 \\ x - 2xy + y = 5 \end{cases}$$

- Déterminer la valeur de la somme $s = x + y$ et du produit $p = xy$ de tout couple (x, y) de solutions de (S).
- Résoudre (S).

IV Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$


Exercice 15 : 

Soit $n \geq 1$. Soit P un polynôme de degré n . Déterminer le degré des polynômes $Q = X^2 P' + P$ et $R = X P' + P$.

Exercice 16 : (★) 

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$X P'' + X^2 P' = 2X^3 - X^2 + 2X.$$

Exercice 17 : (★★) 

Déterminer l'ensemble des $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$X^2 P'' + 2X P' - 2P = 0.$$


Exercice 18 : (★)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$L_n(X) = \frac{1}{2^n n!} P_n^{(n)} \text{ où } P_n = (X^2 - 1)^n.$$

- Déterminer le degré et le coefficient dominant de L_n .

2. Calculer $L_n(1)$ et $L_n(-1)$.

Exercice 19 : (★★) 

Soit $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$, soit $n = \deg P$. Montrer que les sommes des zéros de $P, P', \dots, P^{(n-1)}$ forment une progression arithmétique.

Exercice 20 :  

Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, P^{(k)}(0) = k! a_k.$$

Exercice 21 :  Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :

$$(X-1)^2 \left| \left(\sum_{k=0}^{n-1} X^k \right)^2 - n^2 X^{n-1} \right.$$

et

$$(X-1)^3 \mid nX^{n+2} - (n+2)X^{n+1} + (n+2)X - n.$$

Exercice 22 : (★)

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. On pose :


$$P = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}.$$


- Calculer $P(X) - P'(X)$.
- Montrer que toutes les racines complexes de P sont simples.

Exercice 23 : (★★)

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ tel que $b \neq 0$.

Trouver les polynômes de degré 5 tels que $P(X) + a$ soit divisible par $(X+b)^3$ et $P(X) - a$ soit divisible par $(X-b)^3$.

Exercice 24 :  Soit $P = X^{10} - 25X^6 + 48X^5 - 25X^4 + 1 \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que 1 est racine de P et déterminer son ordre de multiplicité.

Exercice 25 : (★★★) 

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tels que $P = (X-1)^n - (X^n - 1)$ ait une racine double.

Exercice 26 : (★) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

Montrer que si P est scindé et $\deg(P) \geq 2$ alors P' est scindé.

V Polynômes irréductibles

Exercice 27 : (★★) ✨

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg P \geq 2$. Montrer que l'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto P(x)$ n'est pas injective.

Exercice 28 : (★★) 🦋

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que :

$$P(X^2) = P(X-1)P(X+1).$$

1. Montrer que si α est racine de P , il existe une racine de P dont le module est strictement supérieur à $|\alpha|$.
2. En déduire le polynôme P .

Exercice 29 : (★★) ✨

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $P_n = \sum_{k=0}^n X^k$. Déterminer la décomposition en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de P_n .
2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la valeur de :

$$\prod_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{n+1}.$$

Exercice 30 : 📖 Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants :

1. $(X^2 - X + 1)^2 + 1$,
2. $X^3 - 5X^2 + 3X + 9$,
3. $(X^2 - X + 2)^2 + (X - 2)^2$,
4. $6X^5 + 15X^4 + 20X^3 + 15X^2 + 6X + 1$.

Exercice 31 : (★)

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme $P = X^4 - 14X^2 + 24X - 8$ sachant qu'il admet une racine multiple.

Exercice 32 : (★) Donner la décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ puis dans $\mathbb{R}[X]$ de :

$$P = X^n - 1$$

Exercice 33 : (★) 🦋

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ le polynôme :

$$X^{2n} - 2(\cos a)X^n + 1.$$

VI Introduction à la décomposition en éléments simples

Exercice 34 : 📖 Déterminer une primitive de :

$$f : x \mapsto \frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

Exercice 35 : (★) Déterminer une primitive de :

$$f : x \mapsto \frac{x^5}{x^4 - 1}.$$

Exercice 36 : (★) ✨

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la décomposition en éléments simples de :

$$\frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)}$$

Exercice 37 : (★)

1. Décomposer en éléments simples :

$$\frac{3X + 8}{X(X+2)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{3k+8}{k(k+2)2^k}.$$

3. En déduire la limite de la suite (S_n) .

Exercice 38 : (★★) ✨

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^*$ deux à deux distincts, soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Posons :

$$P = \lambda \prod_{k=1}^n (X - x_k).$$

1. Montrer que :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P'(x_k) = \lambda \prod_{j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{k\}} (x_k - x_j).$$

2. En déduire que la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P}$ est :

$$\frac{1}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{P'(x_k)(X - x_k)}.$$

3. En déduire que :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k P'(x_k)} = -\frac{1}{P(0)}.$$