Exercices du chapitre 15 : Analyse asymptotique

I Relations de comparaison : cas des fonctions

Exercice 1 :
Déterminer un équivalent simple de f au voisinage de 0 ($a > 0, b > 0$) :

1. $f(x) = \cos(\sin x)$,
2. $f(x) = \ln(\cos x)$,
3. $f(x) = \ln(\sin x)$,
4. $f(x) = \cos(ax) - \cos(bx)$.

Exercice 2 : ($\star$)
Déterminer un équivalent simple de f au voisinage de 0 ($a > 0, b > 0, a \neq b$) :

1. $f(x) = a^x - b^x$,
2. $f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2x+1}\right)$,
3. $f(x) = \sqrt[4]{1+x^2} - \sqrt[4]{1-x^2}$,
4. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+3x}} - \frac{1}{\sqrt{2-3x}}$.

Exercice 3 : ($\star$)
Calculer les limites suivantes en se servant d'équivalents :

1. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan x \tan 2x$,
2. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} (2x^2-3x+1)\tan \pi x$,
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$,
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos x)}{1-\cos 2x}$.

Exercice 4 : ($\star$)
Calculer les limites suivantes en se servant d'équivalents :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \ln x \ln(1+\ln(1+x))$,
2. $\lim\limits_{x\to 0} (1+\tan x)^{1/\sin x}$,
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\ln x}{x^x - 1}$.

Exercice 5 : ($\star$)
Calculer les limites suivantes en se servant d'équivalents :

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}(e^{\cos x - 1} - 1)$,
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{4x+1}\ln\left(1 - \dfrac{\sqrt{x+1}}{x+2}\right)$.

Exercice 6 : ($\star\star$)
Comparer les fonctions suivantes au voisinage des points indiqués :

1. $x\ln x$ et $\ln(1+2x)$ au voisinage de 0,
2. $x\ln x$ et $\sqrt{x^2+3x}\ln(x^2)$ au voisinage de $+\infty$,
3. $\frac{1}{x+1}$ et $\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ au voisinage de -1,
4. $x^{-1/x}$ et $\ln x$ au voisinage de 0.

II Développements limités

Exercice 7 :
Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \cos x$ à l'ordre 4 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$,
2. $f : x \mapsto \ln x$ à l'ordre 4 au voisinage de e,
3. $f : x \mapsto e^x$ à l'ordre 4 au voisinage de 1,
4. $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 2.

Exercice 8 :
Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto (e^x-1)^2$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Exercice 9 : ($\star$)
Calculer le développement limité des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto e^x \mathrm{Arctan}\, x$ à l'ordre 5 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 1,

3. $f : x \mapsto \dfrac{(\sin x)^2}{x^2}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,
4. $f : x \mapsto (\cos x)^3$ à l'ordre 6 au voisinage de 0.

Exercice 10 :
Calculer le développement limité des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto e^{\sin x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto e^{\cos x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Exercice 11 :
Calculer le développement limité des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto \ln \dfrac{\sin x}{x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto \sin(2x - 4x^2) - 2\sin(x - x^2)$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 12 : (⋆⋆)
Calculer le développement limité des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto (1+x)^{1/x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto (\cos x)^{\sin x}$ à l'ordre 5 au voisinage de 0,

Exercice 13 : (⋆)
Calculer le développement limité des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto \ln(1 + \dfrac{x^2}{1+x})$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto e^{\cos x}(1 + e^{-1/x^2})$ à l'ordre 5 au voisinage de 0,
3. $f : x \mapsto \cos(\ln(\cos x))$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,
4. $f : x \mapsto \ln(2 + x + \sqrt{1+x})$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 14 : (⋆⋆)
Calculer le développement limité à l'ordre $n+1$ en 0 de :

$$f : x \mapsto \ln(\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}).$$

Exercice 15 : (⋆⋆)
Calculer les développements limités des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}}{\cos x}$ à l'ordre 4 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{1-\cos x}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0.

Exercice 16 : (⋆⋆)
Calculer les développements limités des fonctions suivantes :
1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$ à l'ordre 3 au voisinage de 0,
2. $f : x \mapsto (1 + \operatorname{Arctan} x)^{\frac{x}{(\sin x)^2}}$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

Exercice 17 : (⋆)
Calculer le développement limité de $f : x \mapsto \displaystyle\int_{x^3}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$ à l'ordre 13 au voisinage de 0.

Exercice 18 : (⋆⋆)
Calculer le développement limité de : $f : x \mapsto \operatorname{Arctan}(2\sin x)$ à l'ordre 3 au voisinage de $\frac{\pi}{3}$,

III Applications des développements limités

Exercice 19 :
Calculer les limites suivantes :
1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1) - 2(e^x-1)}{x^3}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1-x+\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$.

Exercice 20 : (⋆)
Calculer les limites suivantes :
1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x-\sin x)}{\sqrt{1+x^3}-1}$,
2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$,
3. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right)$.

Exercice 21 : (⋆⋆)
Calculer les limites suivantes :
1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/(\sin x)^2}$,

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e-(1+\frac{1}{x})^x\right)^{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}$,
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\ln(x+\sqrt{x^2-1})}{\left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)^2}$.

Exercice 22 :
Soit $f :]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\setminus\{0\}$, $x \mapsto \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$. Montrer que f admet un prolongement de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 23 :
Etudier la tangente en 0 et la position relative de la courbe par rapport à sa tangente pour la fonction :

$$x \mapsto \ln(x^2+2x+2)$$

Exercice 24 :
Etudier les éventuelles asymptotes à la courbe représentative de la fonction :

$$x \mapsto \sqrt{x^2+x+1}.$$

Exercice 25 : (⋆)
Etudier les éventuelles asymptotes de $f : x \mapsto \frac{x^2}{x-1} e^{1/x}$.

IV Relations de comparaison : cas de suites

Exercice 26 :
Trouver une suite simple équivalente à la suite :

1. $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$,
2. $x_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$,
3. $x_n = n \sin \frac{1}{n^2}$,
4. $x_n = n^{1/n} - 1$,
5. $x_n = \ln(n+1) - \ln(n)$,
6. $x_n = \tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)$,
7. $x_n = \left(\tan\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n}\right)\right)^{\pi}$.

Exercice 27 : (⋆⋆)

1. Soit (x_n) une suite de réels strictement positifs telle que :
$$\lim \frac{x_{n+1}}{x_n} = l, \text{ avec } l < 1.$$
Montrer que :
$$\lim x_n = 0.$$
2. Soit $a > 0$, montrer que :
$$a^n = o(n!)$$
3. Montrer que :
$$n! = o(n^n)$$

Exercice 28 :
Utiliser des équivalents pour calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3 \sin \dfrac{1}{n^2}$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(n^{1/n^2} - 1\right)$,
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln \sqrt{\dfrac{n+1}{n-1}}$.

Exercice 29 :
Utiliser des équivalents pour calculer les limites :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$,
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n}{n-x}\right)^n$,
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)^n$.

V Problèmes d'analyse asymptotique

Exercice 30 : (⋆⋆)
Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto xe^{x^2}$ est bijective. Former le développement limité à l'ordre 5 en 0 de f^{-1}.

Exercice 31 : (⋆)

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^3 + nx = 1$ admet une unique solution que l'on notera x_n.

2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}.$$
En déduire la limite de (x_n).
3. Montrer que
$$x_n = \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$
4. Montrer que
$$x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

Exercice 32 : (⋆) On pose : $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1 + \dfrac{u_n}{n+1}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq u_n \leq 1 + \dfrac{2}{n}$. En déduire $\lim u_n$.
2. Montrer que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$.
3. Montrer que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
4. Montrer que $u_n = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Exercice 33 : (⋆⋆)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\tan x \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = 1$ admet une unique solution dans $]n\pi, (n+1)\pi[$ notée x_n.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n - n\pi = \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{\operatorname{sh} x_n}{\operatorname{ch} x_n}\right)$. En déduire $l = \lim_{n\to+\infty}(x_n - n\pi)$ et trouver un équivalent simple de $(x_n - n\pi - l)$.

Exercice 34 : (⋆⋆⋆)
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x - \ln x = n$ admet une unique solution dans $[1, +\infty[$ que l'on note u_n.
Montrer que :
$$u_n = n + \ln n + \frac{\ln n}{n} + o\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Exercice 35 : (⋆⋆) On pose :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}\, dx.$$

1. Montrer que : $\lim I_n = 0$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 2I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$.
3. Montrer que $\lim nI_n = 1$ puis que $\lim n(nI_n - 1) = -3$.
4. Montrer que :
$$I_n = \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$