Exercices du chapitre 18 : Applications linéaires

I Généralités

Exercice 1 : Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, y-z) \end{array},$$

$$f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & xy \end{array},$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u_n) & \mapsto & (u_0, u_1, u_2) \end{array},$$

$$f_4 : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ (u_n) & \mapsto & \lim u_n \end{array},$$

où E est l'ensemble des suites réelles convergentes.

Exercice 2 : Déterminer une base de l'image et une base du noyau de l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x,y) \mapsto (x-y, y-x, 0)$$

Exercice 3 : (⋆) Montrer que l'application suivante est linéaire :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P-(X+1)P' \end{array}.$$

Déterminer une base de son noyau et de son image.

Exercice 4 : (⋆)
Déterminer une base de l'image et une base du noyau des applications linéaires suivantes :

1. $f_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (x-y, y-z, z-x)$,
2. $f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $z \mapsto z + i\bar{z}$.

Exercice 5 : (⋆)
On pose $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et on définit l'application φ par, pour tout $f \in E$, $\varphi(f) = g$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^x t f(t)\,dt.$$

Montrer que φ est un endomorphisme de E.
Est-il injectif ? surjectif ?

Exercice 6 : (⋆)
Montrer qu'il existe une unique application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(1,0,0) = (0,1),\ f(1,1,0) = (1,0),\ f(1,1,1) = (1,1).$$

Déterminer f et calculer son noyau et son image.

Exercice 7 :
Déterminer le rang de l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x-y+z+t, x+2z-t, x+y+3z-t) \end{array}.$$

Exercice 8 : (⋆) Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $f, g \in \mathcal{L}(E,F)$. Montrer que :

$$|\operatorname{rg} f - \operatorname{rg} g| \leq \operatorname{rg}(f+g) \leq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g.$$

II Endomorphismes

Exercice 9 : (⋆)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $f^2 - 5f + 6Id_E = 0_E$. Montrer que :

$$E = \operatorname{Ker}(f - 2Id_E) \oplus \operatorname{Ker}(f - 3Id_E).$$

Exercice 10 : (⋆⋆)
Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

$$E = \operatorname{Im} f + \ker f \Leftrightarrow \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f \circ f,$$

$$\operatorname{Im} f \cap \ker f = \{0\} \Leftrightarrow \ker f = \ker f \circ f.$$

Exercice 11 : (⋆) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient $f, g \in \mathcal{L}(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

Exercice 12 : Soit $E=\mathbb{R}^3$. On pose $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(1,1,0)$, $e_3=(1,2,3)$, $F=\operatorname{Vect}(e_1,e_2)$ et $G=\operatorname{Vect}(e_3)$.

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.
2. Donner l'expression du projecteur p sur F parallèlement à G.
3. Donner l'expression du projecteur q sur G parallèlement à F.

Exercice 13 : $(\star\star)$ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient p et q des projecteurs de E.

1. Montrer que $p+q$ est un projecteur si et seulement si $p\circ q=q\circ p=0$.
2. Montrer que dans ce cas :

$$\operatorname{Im}(p+q)=\operatorname{Im}p\oplus\operatorname{Im}q \text{ et } \operatorname{Ker}(p+q)=\operatorname{Ker}p\cap\operatorname{Ker}q.$$

Exercice 14 : $(\star)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, soient p et q des projecteurs de E tels que $p\circ q=0$.

1. Montrer que $r=p+q-q\circ p$ est un projecteur.
2. Montrer que :

$$\operatorname{Ker}r=\operatorname{Ker}p\cap\operatorname{Ker}q,\ \operatorname{Im}r=\operatorname{Im}p\oplus\operatorname{Im}q$$

III Applications linéaires en dimension finie

Exercice 15 :

On pose $E=\mathbb{R}^3$, $F=\operatorname{Vect}(1,0,0)$ et $G=\operatorname{Vect}((1,1,0),(1,1,1))$.
Montrer qu'il existe une unique application $f\in\mathcal{L}(E)$ telle que :

$$\forall u\in F,\ f(u)=2u \text{ et } \forall v\in G,\ f(v)=-v.$$

Déterminer cette application linéaire.

Exercice 16 : $(\star)$

Donner une base de l'espace des suites à termes complexes vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+3}=2u_{n+2}+u_{n+1}-2u_n.$$

Exercice 17 : $(\star\star)$

Soit $n\in\mathbb{N}^*$, soient $a_1,\dots,a_{n+1}$ des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$.

1. On considère l'application :

$$\varphi:\begin{array}{ccc}\mathbb{K}_n[X] & \to & \mathbb{K}^{n+1}\\ P & \mapsto & (P(a_1),\dots,P(a_{n+1}))\end{array}.$$

   Montrer que φ est un isomorphisme.
2. On note $(e_1,\dots,e_{n+1})$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$. Pour $k\in[\![1,n+1]\!]$, on pose $L_k=\varphi^{-1}(e_k)$.
   Montrer que $(L_1,\dots,L_{n+1})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$ et donner l'expression de L_k en fonction de $a_1,\dots,a_{n+1}$.
3. Soit $P\in\mathbb{K}_n[X]$, déterminer les coordonnées de P dans la base $(L_1,\dots,L_{n+1})$.

Exercice 18 : $(\star\star)$ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\forall Q\in\mathbb{R}_n[X],\ \exists! P\in\mathbb{R}_n[X],\ Q=\sum_{i=0}^{n}P^{(i)}\left(\frac{X}{2^i}\right).$$

Exercice 19 : $(\star)$

Soient $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ tels que $\alpha\neq\beta$. Montrer que :

$$\forall A\in\mathbb{C}[X],\ \exists! P\in\mathbb{C}[X],\ P(X-\alpha)+P(X-\beta)=A.$$

Exercice 20 : $(\star\star)$

Soit $p\in\mathbb{N}$, posons :

$$E=\{P\in\mathbb{R}[X],\ P(0)=0\},\ E_p=\{P\in E,\ \deg P\leq p\},$$

$$F_p=\{P\in\mathbb{R}[X],\ \deg P<p\}.$$

1. Montrer que E, E_p et F_p sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ et que E et F_1 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $\Delta:\mathbb{R}[X]\to\mathbb{R}[X]$, $P\mapsto P(X+1)-P(X)$.
   (a) Préciser le degré de $\Delta(P)$ en fonction du degré de P.
   (b) Montrer que Δ est linéaire et préciser son noyau.
3. Montrer que Δ induit un isomorphisme de E sur $\mathbb{R}[X]$.

IV Théorème du rang

Exercice 21 : $(\star)$ Soient E,F,G des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de même dimension n, soient $f\in\mathcal{L}(E,F)$ et $g\in\mathcal{L}(F,G)$. Montrer que :

$$\operatorname{rg}f+\operatorname{rg}g-n\leq\operatorname{rg}(g\circ f)\leq\inf(\operatorname{rg}f,\operatorname{rg}g).$$

Exercice 22 : $(\star\star)$ Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer qu'il existe $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im}u=\operatorname{Ker}u$ si et seulement si n est pair.

Exercice 23 : $(\star\star)$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, soient F et G des sous-espaces vectoriels de E. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe $u\in\mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im}u=F$ et $\ker u=G$.

Exercice 24 : (⋆⋆⋆)
Soient E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$.

1. On suppose que :
$$\forall g \in \mathcal{L}(F,E), f \circ g \circ f = 0 \Rightarrow g = 0.$$
Montrer que f est bijective.
2. Calculer, en fonction de $p = \dim E$, $n = \dim F$ et $r = \operatorname{rg} f$ la dimension de :
$$H = \{g \in \mathcal{L}(F,E),\ f \circ g \circ f = 0\}.$$

V Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Exercice 25 : (⋆)
Pour tout $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on appelle trace de M et on note $\operatorname{tr}(M)$ le nombre :
$$\operatorname{tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}.$$

1. Montrer que l'application $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $M \mapsto \operatorname{tr}(M)$ est une forme linéaire.
2. Déterminer la dimension de :
$$\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ \operatorname{tr}(M) = 0\}.$$

Exercice 26 : (⋆) Soient f et g des formes linéaires telles que : $\forall x \in E,\ f(x).g(x) = 0$. Montrer que :
$$f = 0 \text{ ou } g = 0.$$

Exercice 27 : (⋆⋆) Soit E de dimension finie. Soit H un hyperplan de E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que H soit stable par u. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que :
$$\operatorname{Im}(u - \lambda Id_E) \subset H.$$

Exercice 28 : (⋆⋆)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. Soient H_1 et H_2 des hyperplans distincts de E. Déterminer :
$$\dim(H_1 \cap H_2).$$