Exercices du chapitre 1 : Rudiments de logique et d'arithmétique

I Bases des mathématiques

Exercice 1 : (⋆)

Déterminer les valeurs de $n \in \mathbb{N}$ pour lesquelles $\dfrac{2n^2-n-6}{n+3} \in \mathbb{Z}$.

II Rudiments de logique

Exercice 2 :

Examiner la vérité des propositions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x+y^2=0$,
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x+y^2=0$,
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ x+y^2=0$,
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R},\ x+y^2=0$,
5. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R},\ x+y^2=0$.

Exercice 3 : (⋆)

Examiner la vérité de la proposition suivante, ainsi que celles que l'on peut obtenir en permuttant les quantificateurs :

$$\exists x \in \mathbb{R}^*,\ \forall y \in \mathbb{R}^*,\ \forall z \in \mathbb{R}^*,\ z = xy.$$

Exercice 4 : (⋆)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$a^2+ab+b^2=0 \Rightarrow a=b=0.$$

Exercice 5 :

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n^2+1} \notin \mathbb{N}.$$

Exercice 6 : (⋆)

Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \Rightarrow a = 0.$$

Exercice 7 : (⋆)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$(\forall \varepsilon > 0, a < b+\varepsilon) \Rightarrow a \leq b.$$

Exercice 8 : (⋆)

Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$x \notin \mathbb{Q} \Rightarrow 1+x \notin \mathbb{Q}.$$

Exercice 9 : (⋆)

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$x+y \notin \mathbb{Q} \Longrightarrow (x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } y \notin \mathbb{Q}).$$

Exercice 10 : (⋆⋆)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $x_1, \ldots, x_n, M \in \mathbb{R}$. Montrer que :

$$x_1+\cdots+x_n > M \Longrightarrow \max(x_1,\ldots,x_n) > \frac{M}{n}.$$

Exercice 11 : (⋆⋆)

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)$ est pair.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, traduire en termes logiques la propriété : "n est divisible par 8".
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On considère la propriété P suivante :

   "si n^2-1 n'est pas divisible par 8, alors l'entier n est pair".

   (a) Ecrire la contraposée de P.
   (b) Prouver, par un raisonnement direct, la contraposée de P.
   (c) Que peut-on en déduire pour P ?

Exercice 12 : (⋆⋆)

Soit $m \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ mx+1 \geq 0) \Leftrightarrow m = 0.$$

III Division d'entiers

Exercice 13 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - n. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n + n + 1.$$

Exercice 14 :
Montrer que :
pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.

Exercice 15 :
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 6 | 7^n - 1.$$

Exercice 16 : (⋆⋆)
Montrer que :
1. pour tout $n \geq 2$, $2^{2^n} - 6$ est divisible par 10,
2. la somme des cubes de trois entiers consécutifs est divisible par 9.

Exercice 17 : (⋆)
Soit $n \in \mathbb{Z}$, montrer que $\dfrac{21n-3}{4}$ et $\dfrac{15n-2}{4}$ ne sont pas simultanément dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 18 : (⋆)
On divise deux entiers a et b, tels que $a > b$, par leur différence $a-b$. Comparer les quotients et les restes obtenus.

IV pgcd et ppcm

Exercice 19 :
On définit la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_1 = 1, \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \left(\frac{5}{3}\right)^n.$$

Exercice 20 :
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 0 \\ u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n(n-1).$$

Exercice 21 : (⋆)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{u_n + u_{n+1}}{2} + 1. \end{cases}$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Exercice 22 : (⋆⋆)
Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 23 :
Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que si on divise 4373 et 826 par n, on obtient respectivement 8 et 7 pour restes.

Exercice 24 :
Déterminer les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que si on divise 6381 et 3954 par n, on obtient respectivement 9 et 6 pour restes.

Exercice 25 :
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer :

$$\text{pgcd}\,(mn, (2m+1)n).$$

Exercice 26 : (⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose :

$$a = n^2 + 3n \text{ et } b = n^2 + 5n + 6.$$

1. Déterminer $\text{pgcd}(n, n+2)$.
2. Déterminer $\text{pgcd}(a, b)$.

Exercice 27 : (⋆⋆)
Déterminer les entiers naturels non nuls a, b tels que $a \leq b$ et :

$$\text{ppcm}(a, b) = 21\text{pgcd}(a, b).$$

V Nombres premiers

Exercice 28 : (⋆)
On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{n+1}(u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2).$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 1.$$

Exercice 29 : (⋆⋆)
Soit (u_n) la suite vérifiant :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \begin{cases} 2u_{\frac{n}{2}} + 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ u_n + 1 & \text{si } n \text{ impair.} \end{cases}$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n.$$

Exercice 30 : (⋆ ⋆ ⋆)
Sans utiliser la décomposition en facteurs premiers, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists p, q \in \mathbb{N},\ n = 2^p(2q+1).$$

Exercice 31 :
Soient $a, n \in \mathbb{N}^*$, soit p un nombre premier. Montrer que :

$$p | a^n \Rightarrow p^n | a^n.$$

Exercice 32 : (⋆)
Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Montrer qu'aucun des entiers successifs de $n! + 2$ à $n! + n$ n'est premier. Comment obtenir n entiers consécutifs non premiers?
Donner cinq entiers naturels consécutifs non premiers les plus petits possibles.

Exercice 33 : (⋆⋆)
Soient $a, b, c, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $ab = c^k$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1$. Montrer qu'il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ tels que $a = \alpha^k$ et $b = \beta^k$.

Exercice 34 : (⋆)
Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si $2^p - 1$ est premier, alors p est premier.
2. On appelle nombre parfait un entier n dont la somme des diviseurs vaut $2n$.
   Montrer que si $2^p - 1$ est premier, alors $2^{p-1}(2^p - 1)$ est un nombre parfait.

Exercice 35 : (⋆⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ sa décomposition en produit de facteurs premiers.

1. Calculer le nombre de diviseurs positifs de n.
2. Calculer la somme $S(n)$ des diviseurs positifs de n.
3. Montrer que si m et n sont premiers entre eux alors $S(mn) = S(m)S(n)$.

VI Raisonnement par analyse-synthèse

Exercice 36 : (⋆)
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que :

$$f = g + h,$$
$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = a,$$
$$\text{et } h(0) = 0.$$

Exercice 37 : (⋆⋆)
Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique couple (g, h) de fonctions telles que :

$$f = g + h,$$
$$\exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = ax,$$
$$\text{et } h \text{ est continue sur } \mathbb{R} \text{ telle que } \int_0^1 h = 0.$$

Exercice 38 : (⋆⋆)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que : $\forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),\ f \circ g = g \circ f$.

Exercice 39 : (⋆⋆)
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (x \neq y \text{ et } x \neq z) \Rightarrow \left(\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{f(x) - f(z)}{x - z} \right).$$

Montrer que :

$$\exists a, b \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b.$$