Exercices du chapitre 21 : Espérance et variance

I Espérance

Exercice 1 :

Soit $n \in \mathbb{N}$, soit r tel que $0 \leq r \leq n$.
Un placard contient n paires de chaussures. On tire, au hasard, $2r$ chaussures du placard. On note X la variable aléatoire égale au nombre de paires complètes parmi les chaussures tirées.
Les paires du placard sont numérotées de 1 à n. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si la $i^{\text{ème}}$ paire se trouve parmi les chaussures tirées et 0 sinon.

1. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer la loi et l'espérance de X_i.
2. Déterminer l'espérance de X.

Exercice 2 : ($\star$)

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Déterminer l'espérance de $U = \max(X, Y)$ et de $V = \min(X, Y)$.

Exercice 3 : ($\star\star$)

Une urne U_1 contient trois boules numérotées de 1 à 3 et une urne U_2 contient trois boules numérotées de 4 à 6.
On effectue une succession de lancers d'un dé à 6 faces. A chaque lancer, on change d'urne la boule portant le numéro donné par le dé. On note X_n le nombre de boules dans l'urne U_1 à l'issue du n-ième lancer.

1. Déterminer les lois de X_1 et X_2.
2. Déterminer $P(X_{n+1} = k)$ en fonction de $P(X_n = i)$ pour $i \in X_n(\Omega)$.
3. Donner une relation de récurrence entre $E(X_{n+1})$ et $E(X_n)$. En déduire $E(X_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 : ($\star\star$)

Soit $p \in [0, 1]$. Une puce se déplace aléatoirement sur une droite d'origine 0. A chaque instant elle fait un bond d'une unité vers la droite avec une probabilité p ou vers la gauche avec la probabilité $1 - p$. A l'instant initial, la puce est à l'origine.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la position de la puce à l'instant n.
Déterminer la loi de X_n ainsi que son espérance.

II Variance, écart type et covariance

Exercice 5 :

Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules rouges indiscernables ou toucher. On tire simultanément 3 boules de d'urne. On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges tirées. Déterminer la variance de X.

Exercice 6 : ($\star\star$)

On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. A chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on marque un point.
Pour $n \geq 2$, soit X_n la variable aléatoire égale au nombre de points obtenus à l'issu de n lancers.

1. Déterminer les lois , les espérances et les variances de X_2 et X_3.
2. Soit $n \geq 2$, quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n ? Déterminer $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n - 1)$.
3. Soit $n \geq 2$, soit $k \in [\![1, n]\!]$, montrer que :
$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2} P(X_n = k) + \frac{1}{2} P(X_n = k - 1).$$
4. Soit $n \geq 2$. On pose :
$$Q_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ s & \mapsto & \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) s^k. \end{array}$$
   (a) Soit $n \geq 2$. Calculer $Q_n(1)$ et montrer que $Q_n'(1) = E(X_n)$. Exprimer $V(X_n)$ à l'aide de la fonction Q_n.
   (b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, pour tout $s \in \mathbb{R}$:
   $$Q_{n+1}(s) = \frac{1 + s}{2} Q_n(s).$$
   (c) En déduire une expression de $Q_n(s)$ en fonction de n et de s.
   (d) Calculer alors, pour tout $n \geq 2$, l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 7 : ($\star\star$)

Soit $n \geq 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on tire deux boules sans remise. On note X (resp. Y) la variable aléatoire égale au plus petit (resp. au plus grand) des deux numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de Y.

2. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.
3. Déterminer la loi de X.
4. Montrer que les variables aléatoires Y et $n+1-X$ ont même loi. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 8 : (⋆⋆)
Soit $n \geq 2$, soit $p \in]0,1[$. Soient X et Y des variables aléatoires à valeurs respectivement dans $[\![0,n]\!]$ et $[\![1,n]\!]$ telles que :

$$\forall (j,k) \in [\![0,n]\!] \times [\![1,n]\!],\ P((X,Y)=(j,k)) = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k} & \text{si } k=j\neq 0 \\ \frac{(1-p)^n}{n} & \text{si } j=0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X et la loi de Y.
2. Calculer l'espérance de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $X=j$.
5. Calculer la covariance de X et Y. Existe-t-il des valeurs de p telles que X et Y soient décorrélées ?

III Inégalités probabilistes

Exercice 9 : (⋆)
Une machine A fabrique 100 pièces dont 5% sont défectueuses. Une machine B, indépendante de A, fabrique 400 pièces dont 10% sont défectueuses. Soit X (resp. Y) la variable aléatoire donnant le nombre de pièces défectueuses pour A (resp. B).

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Soit $Z = X+Y$. Déterminer $E(Z)$ et $V(Z)$.
3. Déterminer une valeur c pour laquelle le risque que le nombre de pièces défectueuses dans l'ensemble de la production soit supérieur à c est inférieur à 5%.

Exercice 10 : (⋆⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $X \sim \mathcal{B}(4n, \frac{1}{2})$.

1. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. En utilisant l'inégalité de Markov, majorer $P(X \geq 3n)$.
3. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, majorer $P(X \geq 3n)$.
4. En utilisant l'inégalité de Markov appliquée à $Y = 2^X$, majorer $P(X \geq 3n)$.
5. Comparer les résultats obtenus.

Exercice 11 : (⋆⋆)
Soit X une variable aléatoire réelle, soit $a > 0$.

1. Montrer que :
$$\forall t \geq 0,\ P(X - E(X) \geq a) \leq \frac{t^2 + V(X)}{(t+a)^2}.$$
2. En déduire que :
$$P(X - E(X) \geq a) \leq \frac{V(X)}{V(X)+a^2}.$$
3. En déduire l'inégalité de Cantelli :
$$P(|X - E(X)| \geq a) \leq \frac{2V(X)}{V(X)+a^2}.$$