Exercices du chapitre 2 : Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

I Sommes

Exercice 1 :
Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} x_k = n(n+2).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminer les valeurs de :

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{6} x_k$,
2. $S_2 = \sum_{k=0}^{n+1} x_k$,
3. $S_3 = \sum_{k=0}^{2n} x_k$,
4. $S_4 = \sum_{k=0}^{n} 2x_k$,
5. $S_5 = \sum_{k=n+1}^{2n} x_k$.

Exercice 2 : (⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k.$$

Exercice 3 : (⋆)
Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{n=0}^{N} n^3.$$

Exercice 4 :
Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$\sum_{q=0}^{n} \sum_{p=0}^{q} \sum_{k=0}^{p} 2^k.$$

Exercice 5 : (⋆⋆)
Soit $n \geq 2$.

a. Simplifier l'expression :

$$\sum_{p=1}^{n} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} \right).$$

b. Utiliser une méthode analogue pour en déduire une expression plus simple de :

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{2p+1}{(p^2+p)^2}.$$

Exercice 6 : (⋆)

1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

2. On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Etudier la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

II Produits

Exercice 7 :
Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$\prod_{k=0}^{n} 2^k.$$

Exercice 8 : (⋆)
Montrer que :

a. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)! \geq \sum_{k=1}^{n} k!$,

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$.

Exercice 9 : ($\star$)
Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^{n-1} \leq n! \leq n^n.$$

Exercice 10 : ($\star\star$)
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de nombres réels strictement positifs.
On définit la suite des moyennes arithmétiques par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, A_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k.$$
On définit la suite des moyennes géométriques par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, G_n = \left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$
Le but de cet exercice est de montrer l'inégalité arithmético-géométrique :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, G_n \leq A_n.$$

1. Montrer que :
$$\forall x > 0, \ln(x) \leq x - 1.$$
2. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln\left(\prod_{k=1}^{n} u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(u_k)$$
3. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, G_n \leq A_n.$$
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans quel cas a-t-on $A_n = G_n$?

Exercice 11 : ($\star\star$)
Soit $n \geq 2$. Simplifier l'expression :
$$\prod_{p=1}^{n} \frac{(2p+1)(2p-1)}{(2p+3)(2p+5)}.$$

Exercice 12 : ($\star\star$)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soient $a_1, \ldots, a_n \in [1, +\infty[$. Montrer que :
$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \leq 2^{n-1}(1+\prod_{i=1}^{n} a_i).$$

III Sommes doubles

Exercice 13 :
Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer :
$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^{2i-j}.$$

Exercice 14 :
Soit $n \in \mathbb{N}$. vérifier que :
$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k} 2^k,$$
et en déduire la valeur de :
$$\sum_{k=1}^{n} k2^k.$$

Exercice 15 : ($\star\star$)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :
$$\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} \max(i,j),$$
où $\max(i,j)$ désigne le maximum de i et j, c'est-à-dire : $\max(i,j) = j$ si $i \leq j$ et $\max(i,j) = i$ sinon.

IV Coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton

Exercice 16 : ($\star$)
Déterminer tous les $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ avec $p < n$ tels que :
$$\begin{cases} \binom{n}{p} = \binom{n}{p+1} \\ 4\binom{n}{p} = 5\binom{n}{p-1} \end{cases}$$

Exercice 17 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :
$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}}.$$

Exercice 18 : (⋆⋆)
On considère la suite définie par :

$$S_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S_k.$$

Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ S_n \leq n!.$$

Exercice 19 : (⋆)
Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq nq + 1$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p-k}{q} = \binom{p+1}{q+1} - \binom{p-n}{q+1}.$$

Exercice 20 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1}.$$

Exercice 21 :
Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer :

$$\sum_{k=0}^{n} \sum_{i=k}^{n} \binom{n}{i} \binom{i}{k}.$$

Exercice 22 : (⋆⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$.
Calculer :

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n}{2k} \text{ et } \sum_{k=0}^{p-1} \binom{n}{2k+1}$$

Exercice 23 : (⋆ ⋆ ⋆)
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 4^n (n!)^3 < (n+1)^{3n}.$$

V Systèmes linéaires

Exercice 24 :
Résoudre le systèmes suivant d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = -1 \\ x + 2y + 3z = 2 \\ 3x + 4y - 5z = -4 \end{cases}$$

Exercice 25 :
Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Résoudre le systèmes suivant d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 3x + y - z = 1 \\ 5x + 2y - 2z = a \\ 4x + y - z = b \end{cases}$$

Exercice 26 :
Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le systèmes suivant d'inconnues $x, y, \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} mx + (m-1)y = m + 2 \\ (m+1)x - my = 5m + 3 \end{cases}$$

Exercice 27 : (⋆)
Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y + (2m-1)z = 1 \\ mx + y + z = 1 \\ x + my + z = 3(m+1) \end{cases}$$

Exercice 28 : (⋆)
Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre le système suivant d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + mz = 1 \\ mx + y - m^3 z = 1 \end{cases}$$

VI Cercle trigonométrique

Exercice 29 : (⋆)
En remarquant que $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, déterminer les valeurs exactes de :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \text{ et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

Exercice 30 : (⋆)
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -2 \leq \cos x + \sqrt{3} \sin x \leq 2.$$

Exercice 31 : (⋆⋆)
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\},\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z},\ |\sin(nx)| < n|\sin x|.$$

VII Équations et inéquations trigonométriques

Exercice 32 :
Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(2x) + \sin(x) = 0.$$

Exercice 33 : (⋆)
Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$2\cos^2(2x) - 3\cos(2x) = -1.$$

Exercice 34 : (⋆)
Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos(3x) + \sin x = 0.$$

Exercice 35 : (⋆⋆)
Résoudre l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x - \cos 2x = \sin 3x.$$

Exercice 36 :
Résoudre les inéquations suivante d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

1. $\cos x > 0$,
2. $\sin x \leq \frac{1}{2}$,

VIII Fonctions cosinus et sinus

Exercice 37 : Etudier et tracer la fonction définie par :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \cos x.\sin 2x - 2\sin x \end{array}$$

Exercice 38 : (⋆) Etudier et tracer la fonction définie par :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2\sin x + \sin(2x) \end{array}$$

Exercice 39 : (⋆⋆) Etudier la fonction :

$$f : x \mapsto \sin^2 x - \sqrt{2}\cos x.$$

Exercice 40 : (⋆⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$f_n: \begin{array}{rcl} [0, \frac{\pi}{2}] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x\cos^n(x). \end{array}$$

1. Montrer que la dérivée de la fonction f_n peut se mettre sous la forme :

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],\ f_n'(x) = \cos^{n-1}(x) g_n(x),$$

   où g_n est une fonction dont on déterminera l'expression.
2. Etudier les variations de g_n.
3. Montrer que f_n admet un maximum.

IX Tangente

Exercice 41 : (⋆)
On considère la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \tan(2x) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Etudier la périodicité de f.
3. Etudier la parité de f.
4. Montrer que f est dérivable sur $\mathcal{D}$ et que :

$$\forall x \in \mathcal{D},\ f'(x) = \frac{2 + \cos^3(2x)}{\cos^2(2x)}.$$

5. Etudier et tracer f.

Exercice 42 : (⋆⋆)
On considère la fonction définie par :

$$f : x \mapsto \sin(2x) - \frac{3}{4}\tan(x).$$

1. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f.
2. Etudier la périodicité de f.
3. Etudier la parité de f.
4. Etudier et tracer f.

Exercice 43 : (⋆ ⋆ ⋆)
Etudier la fonction :

$$f : x \mapsto \tan^2(x)\sqrt{1 - \cos x}.$$

On étudiera la dérivabilité de f en 0.