Exercices du chapitre 3 : Inégalités et fonctions d'une variable réelle

I Inégalités dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 : ($\star$)
Soient a et b deux réels non nuls, distincts et de même signe. Montrer que :

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2.$$

Exercice 2 :
Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'inéquation suivante :

$$\sqrt{x-4}-\sqrt{2x-3}<0.$$

Exercice 3 : ($\star$)
Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations ou inéquations suivantes :

1. $|2x-4|=|x-1|$
2. $\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right|\leq 2$

Exercice 4 : ($\star$)
Résoudre l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

$$|x+3|-|x-1|=|2x+1|.$$

Exercice 5 : ($\star\star$)
Résoudre l'équation suivante, d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

$$\sqrt{x+4-4\sqrt{x}}+\sqrt{x+9-6\sqrt{x}}=1.$$

Exercice 6 : ($\star\star$)
Soient $x,m\in\mathbb{R}$. Montrer que :

$$x\geq m\Rightarrow\sqrt{1+x^2}\leq 1+2|m|+x.$$

Exercice 7 : ($\star\star$)

1. Montrer que si x et y sont deux réels positifs tels que $x\geq y$, alors :
$$\sqrt{x+y}\leq\sqrt{x}+\sqrt{y}\text{ et }\sqrt{x}-\sqrt{y}\leq\sqrt{x-y}\leq\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$
2. En déduire que, pour tout $x,y\in\mathbb{R}$:
$$\sqrt{|x+y|}\leq\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}$$
$$\text{et }\left|\sqrt{|x|}-\sqrt{|y|}\right|\leq\sqrt{|x-y|}\leq\sqrt{|x|}+\sqrt{|y|}.$$

Exercice 8 : ($\star\star$)
Montrer que pour tout $x,y\in\mathbb{R}$:

$$|x|+|y|\leq|x+y|+|x-y|,$$
$$1+|xy-1|\leq(1+|x-1|)(1+|y-1|).$$

Exercice 9 :
Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \left|\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^n\sin(nx)}{n+k^2}\right|\leq 1.$$

Exercice 10 : ($\star\star$)
Montrer que :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\left(\sin\frac{\pi}{6k}\right)^k\right|\leq 1.$$

Exercice 11 : Résoudre l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{R}$:

$$\left\lfloor\sqrt{x^2+1}\right\rfloor=2.$$

Exercice 12 : ($\star$) Résoudre l'équation d'inconnue $x\in\mathbb{R}^+$:

$$\left\lfloor\sqrt{x}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor.$$

Exercice 13 : ($\star$)
Montrer que :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ \lfloor x\rfloor+\lfloor x+y\rfloor+\lfloor y\rfloor\leq\lfloor 2x\rfloor+\lfloor 2y\rfloor.$$

Exercice 14 : ($\star\star$) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\left\lfloor\frac{\lfloor nx\rfloor}{n}\right\rfloor=\lfloor x\rfloor\text{ et }\sum_{k=0}^{n-1}\left\lfloor x+\frac{k}{n}\right\rfloor=\lfloor nx\rfloor.$$

II Généralités sur les fonctions

Exercice 15 :
Après avoir déterminé les ensembles de définition, étudier la parité des fonctions définies par :

1. $f_1(x) = \dfrac{1}{x - \dfrac{1}{x}}$
2. $f_2(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$
3. $f_3(x) = \dfrac{(x-1)^2 + (x+1)^2}{(x-1)^2 - (x+1)^2}$

Exercice 16 :
Soient $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

a. Montrer que, si f est paire, alors $g \circ f$ est paire.
b. Montrer que si f est impaire et g est impaire, alors $g \circ f$ est impaire.
c. Montrer que si f est impaire et g est paire, alors $g \circ f$ est paire.

Exercice 17 :
On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{1 - \cos(x)}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de f.
2. Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $]0, \pi]$ et indiquer comment obtenir la courbe représentative de f sur tout son domaine de définition à partir de celle sur $]0, \pi]$.

Exercice 18 : (⋆)
Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $T_1, T_2 \in \mathbb{Z}^*$ tels que f est périodique de période T_1 et g est périodique de période T_2.
Montrer que $f + g$ est périodique.

Exercice 19 : (⋆⋆)
Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction strictement croissante. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f \circ f(x) = x \Leftrightarrow f(x) = x).$$

Exercice 20 : (⋆⋆)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f \circ f$ est croissante et $f \circ f \circ f$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice 21 :
Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ n'est pas majorée.

III Bijectivité

Exercice 22 :
On pose $f : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x^2} + 5 \end{array}$.
Montrer que f est bijective de $]0, +\infty[$ vers un intervalle que l'on précisera.

Exercice 23 : (⋆)
On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{2\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ x & \mapsto & \frac{x+1}{x-2} \end{array}$.
Montrer que f est une bijection et déterminer f^{-1}.

Exercice 24 : (⋆)

1. On pose $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x^2-1}{x^2+1} \end{array}$.
   f est-elle bijective ?
2. On pose $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \to & [-1, 1[\\ x & \mapsto & \frac{x^2-1}{x^2+1} \end{array}$.
   Montrer que g est bijective et calculer g^{-1}.

IV Dérivation

Exercice 25 :
Etudier la dérivabilité et calculer les dérivées des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \frac{x}{x^2 - 3x + 2}, \qquad f_2 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{2-x}}, \qquad f_3 : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}.$$

Exercice 26 :
Etudier et représenter la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{(x-1)^2}.$$

Exercice 27 : (⋆)
Etudier et représenter la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}.$$

Exercice 28 : (⋆)
Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{x^2+x+1}{(x-1)^3}$ est décroissante sur l'intervalle $]-\infty, 1[$ et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
Est-elle décroissante sur son ensemble de définition ?

Exercice 29 : (⋆)
Montrer que :

$$\forall x \in [-1,1],\ 2x\sqrt{1-x^2} \in [-1,1].$$

Exercice 30 : (⋆)
Montrer que :

$$\forall x \in [-2,2],\ -4 \leq x^4 - x^2 - 2x - 2 \leq 14.$$

Exercice 31 :
Pour $t \in]0,1]$, on définit :

$$f(t) = \frac{1-t^3}{t}.$$

1. Calculer $f'(t)$, et montrer que f définit une bijection de $]0,1]$ vers $[0,+\infty[$.
2. On note g la bijection réciproque de f.
   Montrer que g est dérivable sur un ensemble que l'on précisera et calculer g' en fonction de g.

Exercice 32 : (⋆)
On considère $f : x \mapsto 1 - x^2 e^x$.

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}^+$ vers $]-\infty, 1]$.
   On considèrera dans la suite que $f : \mathbb{R}^+ \to]-\infty, 1]$.
2. Sur quel(s) intervalle(s) f^{-1} est-elle dérivable ?
3. Déterminer $\left(f^{-1}\right)'(1-e)$.

Exercice 33 : (⋆)
Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée de :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$