

## I Fonctions logarithmes, exponentielle, puissances

### Exercice 1 :

Etudier la dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto \sqrt{\ln x}$ ,
2.  $x \mapsto \left(\frac{x}{\ln x}\right)^2$ ,
3.  $x \mapsto \ln(\ln x)$ ,
4.  $x \mapsto \frac{e^x + 2}{e^x + 1}$ ,
5.  $x \mapsto xe^{-2x}$ ,
6.  $x \mapsto \left(\frac{e^x}{x+1}\right)^2$ ,

### Exercice 2 : (★)

Résoudre l'inéquation suivante, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\ln(x-1) + \ln(x+1) < 2\ln(x) - 1.$$

### Exercice 3 : (★)

Soit  $f : x \mapsto \ln(e^x + 1)$ . Montrer que  $f$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^{+*}$  et déterminer sa bijection réciproque.

### Exercice 4 :

Calculer les limites suivantes :

1.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) \ln(\ln(x))$
2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{2x}$
3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{e^x - 1}$

### Exercice 5 : (★)

Etudier et tracer les fonctions suivantes :

1.  $x \mapsto \frac{1 + \ln(x)}{x^2}$
2.  $x \mapsto \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$

### Exercice 6 : (★)

On considère les fonctions définies par :

$$f : ]0, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto e^x - \ln x \quad \text{et} \quad x \mapsto xe^x - 1.$$

1. Montrer que :

$$\exists! \alpha \in \mathbb{R}, \alpha e^\alpha = 1.$$

2. Etudier le signe de  $g$ .

3. Etudier les variations de  $f$ .

4. Montrer que  $f$  admet un minimum égal à  $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ .

### Exercice 7 : (★★)

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  tels que  $0 < a \leq b$ . On pose :

$$f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}.$$

Etudier la monotonie de  $f$  et en déduire que :

$$\ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \ln\left(1 + \frac{b}{a}\right) \leq (\ln 2)^2.$$

### Exercice 8 : (★)

Etudier la fonction :

$$f : x \mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x.$$

Exercice 9 : (★) Etudier la fonction :

$$f : x \mapsto x^{\frac{x}{x-1}}.$$

## II Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

### Exercice 10 : (★)

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{ch} x \geq 1 + \frac{x^2}{2}.$$

### Exercice 11 : (★)

Etudier  $f : x \mapsto \operatorname{ch}(3x) - 3\operatorname{ch}(x)$ .

### Exercice 12 : (★★)

1. Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh} 2x}{2\operatorname{sh} x}.$$

2. Simplifier :

$$u_n = \prod_{k=1}^n \operatorname{ch} \frac{x}{2^k}.$$

3. En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### Exercice 13 : (★★)

1. Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\operatorname{sh}(x) = 2.$$

2. Résoudre l'inéquation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\operatorname{sh}(x) \leq 2.$$

3. Résoudre l'équation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\operatorname{ch}(x) = 2.$$

4. Résoudre l'inéquation d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\operatorname{ch}(x) \leq 2.$$

### Exercice 14 :

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Montrer que :

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b), \operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b),$$

$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b), \operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b) - \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b),$$

$$\operatorname{ch}(2a) = \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a, \operatorname{sh}(2a) = 2\operatorname{ch} a \operatorname{sh} a.$$

### Exercice 15 : (★★)

1. (a) Montrer que la fonction  $f$  suivante est bijective :

$$f: \mathbb{R}^+ \rightarrow [1, +\infty[ \\ x \mapsto \operatorname{ch} x.$$

On note  $\operatorname{argch}$  sa bijection réciproque.

(b) Montrer que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

2. (a) Montrer que la fonction  $\operatorname{sh}$  est bijective.

On note  $\operatorname{argsh}$  sa bijection réciproque.

(b) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{argsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

## III Fonctions circulaires réciproques

### Exercice 16 : (★)

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \operatorname{Arccos} \frac{1-x^2}{1+x^2} = 2\operatorname{Arctan} |x|.$$

### Exercice 17 : (★★)

Déterminer son ensemble de validité et montrer la formule :

$$2\operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$$

### Exercice 18 : (★★)

Déterminer son ensemble de validité et montrer la formule :

$$2\operatorname{Arctan}(\sqrt{1+x^2} - x) + \operatorname{Arctan} x = \frac{\pi}{2}$$

### Exercice 19 : (★★)

Montrer que :

$$\forall x \in ]-1, 1], \operatorname{Arcsin} \sqrt{1-x^2} - \operatorname{Arctan} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\operatorname{Arcsin} x & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2}\operatorname{Arccos} x & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

### Exercice 20 : (★)

Etudier les variations des fonctions suivantes et tracer leur courbe représentative :

$$1. f_1(x) = \operatorname{Arcsin} \left( \frac{2\sqrt{x}}{1+x} \right),$$

$$2. f_2(x) = (x-1)^2 \operatorname{Arctan} x,$$

### Exercice 21 : (★)

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{++}, \operatorname{Arctan} x > \frac{x}{1+x^2}.$$

### Exercice 22 : (★★)

On pose :

$$f: x \mapsto \operatorname{Arctan} \frac{1 - \cos x}{\sin x}.$$

1. Déterminer le domaine de définition de  $f$ .
2. Etudier la périodicité et la parité de  $f$ .
3. Soit  $x \in ]0, \pi[$ , exprimer  $\frac{1-\cos x}{\sin x}$  en fonction de  $\frac{x}{2}$ .
4. En déduire une expression simple de  $f(x)$  pour  $x \in ]0, \pi[$ .
5. Tracer  $f$  sur  $] -3\pi, 3\pi[$ .
6. Calculer  $f\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ .

**Exercice 23 : (★)**

Simplifier les expressions suivantes :

1.  $\cos(4\text{Arctan } x)$ ,
2.  $\sin(3\text{Arctan } x)$ .

**Exercice 24 : (★★)** ✨ !

Soient  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  avec  $xy \neq 1$ , montrer que :

$$\text{Arctan } x + \text{Arctan } y = \text{Arctan } \frac{x+y}{1-xy} + k\pi,$$

où :

- $k = 0$  si  $xy < 1$ ,
- $k = 1$  si  $xy > 1$  et  $x > 0$ ,
- $k = -1$  si  $xy > 1$  et  $x < 0$ .

**Exercice 25 : (★★)**

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

1.  $\text{Arccos } x = \text{Arcsin } 2x$ ,
2.  $2\text{Arcsin } x = \text{Arcsin } (2x\sqrt{1-x^2})$ .

**Exercice 26 : (★★)** ✨

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue  $x \in \mathbb{R}$  :

1.  $\text{Arctan } x + \text{Arctan } 2x = \frac{\pi}{4}$ ,
2.  $\text{Arcsin } 2x = \text{Arcsin } x + \text{Arcsin } (\sqrt{2}x)$ .

**Exercice 27 : (★★)**

Montrer la formule de Machin :

$$4\text{Arctan } \frac{1}{5} - \text{Arctan } \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}.$$