Exercices du chapitre 6 : Suites numériques : propriétés globales

I Généralités sur les suites

Exercice 1 : (⋆)
On considère la suite définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35}.$$

1. Montrer que (u_n) est majorée par 7.
2. Montrer que (u_n) est croissante.

Exercice 2 : (⋆⋆)
Montrer que si la suite (u_n) est monotone, alors la suite de terme général :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} u_k,$$

est monotone de même sens que (u_n).

II Suites arithmétiques, suites géométriques, arithmético-géométriques

Exercice 3 : (⋆)
On considère la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{2+3u_n}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 0$.
   On pose alors :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{1}{u_n}.$$
2. Montrer que (v_n) est arithmétique.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n.

Exercice 4 : (⋆)
On considère la suite définie par :

$$u_0 = 5 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}.$$

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n > 2$.
   On pose alors :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \frac{u_n - 1}{u_n - 2}.$$
2. Montrer que (v_n) est géométrique.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n puis celle de u_n en fonction de n.

Exercice 5 :
Donner le terme général de la suite définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2.$$

Exercice 6 :
Donner le terme général de la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = -u_n + 4.$$

Exercice 7 : (⋆)
On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - n + 2.$$

On pose :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_n - n.$$

Etudier (v_n) et en déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n en fonction de n.

III Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Exercice 8 :
Donner le terme général de la suite définie par :

$$u_0 = 1,\ u_1 = 9 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

Exercice 9 : (⋆)
Calculer le terme général de la suite (u_n) définie par :

$$u_0, u_1 \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n).$$

Exercice 10 : (⋆⋆)
Calculer le terme général de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n.$$

IV Suites récurrentes d'ordre 1

Exercice 11 :
Etudier monotonie de la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{3}{16} + u_n^2.$$

Exercice 12 : (⋆)
Etudier monotonie de la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 + u_n^2.$$

Exercice 13 : (⋆⋆)
Etudier monotonie de la suite définie par :

$$u_0 \in [-1, +\infty[\text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}.$$

Exercice 14 : (⋆⋆)
Etudier la monotonie de la suite définie par :

$$u_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \ln(1 + 2u_n).$$