# Exercices du chapitre 7 : Primitives



## I Calcul de primitives

**Exercice 1 :**
Déterminer une primitive de :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{2x-3}{(x^2-3x+10)^4}$,
2. $f_2 : x \mapsto xe^{x^2}$,
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{\operatorname{Arctan} x}{1+x^2}$,
4. $f_4 : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$,
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}$,
6. $f_6 : x \mapsto \dfrac{(\ln(3x+6))^3}{x+2}$,
7. $f_7 : x \mapsto \dfrac{2x-5}{(x^2-5x+9)^4}$.

**Exercice 2 :**
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}.$$

En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

$$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

**Exercice 3 :**
Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

$$f : x \mapsto \sin^3 x.$$

**Exercice 4 : ($\star\star$)**
Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\},\ \frac{1}{\sin x} = \frac{1}{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\tan\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

En déduire une primitive de :

$$x \mapsto \frac{1}{\sin x} \text{ et } x \mapsto \frac{1}{\cos x}.$$

**Exercice 5 :**
Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto e^{2x}\cos(3x).$$

**Exercice 6 :** Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos(3x)\,dx$,
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 5\cos x \sin^2 x\,dx$,
3. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}}\,dx$,
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(1+\sin x)^3}\,dx$,
5. $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin^2 x\,dx$,
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{2+\cos x}\,dx$.

**Exercice 7 : ($\star$)**

1. Calculer : $\displaystyle\int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x}\,dx$,
2. Calculer : $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\operatorname{Arcsin} x}{1-x^2}}\,dx$.

**Exercice 8 :**

a. Déterminer une primitive sur $]-2,+\infty[$ de :

$$x \mapsto \frac{\ln^3(2x+4)}{x+2}.$$

b. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de :

$$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{3x^2+2}}.$$

**Exercice 9 : ($\star$)**

1. Déterminer $a, b, c \in \mathbb{R}$, tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\},\ \frac{2x^2-3x-4}{x-2} = ax+b+\frac{c}{x-2}.$$

2. En déduire la valeur de :
$$\int_0^1 \frac{2x^2-3x-4}{x-2}\,dx.$$

**Exercice 10 : (⋆⋆)**
Soit $f \in \mathcal{C}^1([0,+\infty[,\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$ et : $\forall x \in [0,+\infty[,\ 0 \leq f'(x) \leq 1$. Montrer que :
$$\forall x \in [0,+\infty[,\ \left(\int_0^x f\right)^2 \geq \int_0^x f^3.$$

# II Intégration par parties et changement de variable

**Exercice 11 :**
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
1. $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$ sur $]-1,1[$
2. $x \mapsto \dfrac{x}{\cos^2 x}$.

**Exercice 12 : (⋆)**
Calculer les intégrales suivantes :
1. $\displaystyle\int_0^1 t\operatorname{Arctan}(t)\,dt$
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3(t)\sin^4(t)\,dt$

**Exercice 13 : (⋆)**
Déterminer les primitives des fonctions suivantes :
1. $x \mapsto \operatorname{Arctan} x$,
2. $x \mapsto \sin(\ln x)$.

**Exercice 14 :**
Déterminer une primitive de :
$$x \mapsto (x^3+4x^2-2x+7)e^{2x}.$$

**Exercice 15 : (⋆)**
Déterminer une primitive de :
$$x \mapsto x^3\cos x \text{ et } x \mapsto x^3 \sin x.$$

**Exercice 16 : (⋆)**
Calculer les primitives des fonctions suivantes :
1. $x \mapsto x^2\sin^3 x$
2. $x \mapsto (x^2-x+3)\sin x$
3. $x \mapsto (x^2+1)e^x\cos x$
4. $x \mapsto (x\operatorname{sh} x)^2$

**Exercice 17 : (⋆)**
On considère la suite $(I_n)$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\,dx.$$
Etablir une formule de récurrence.

**Exercice 18 : (⋆⋆)**
On considère la suite $(I_n)$ définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^n \sin x\,dx.$$
En utilisant la formule de récurrence établie dans l'exercice précédent, écrire, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_{2p}$ et $I_{2p+1}$ sous forme de sommes.

**Exercice 19 :**
Calculer :
$$\int_0^1 \frac{x^4}{x^{10}+1}\,dx.$$

**Exercice 20 :**
Déterminer une primitive de :
$$x \mapsto \frac{e^{2x}}{1+e^x}.$$

**Exercice 21 : (⋆)**
Calculer les primitives de :
1. $x \mapsto \dfrac{x^7}{(x^4+1)^2}$,
2. $x \mapsto \dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$,
3. $x \mapsto \dfrac{1}{(1+x)\sqrt{x}}$,
4. $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$.

**Exercice 22 : (⋆)** Calculer une primitive de :

1. $x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, en effectuant le changement de variable $t=\sqrt{x^2-1}$,
2. $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}$, en effectuant le changement de variable $t=\sqrt{e^x-1}$.

**Exercice 23 :**
Soit $a>0$. Calculer une primitive de :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \text{ et } x \mapsto \frac{1}{a^2+x^2}.$$

**Exercice 24 : (⋆)**
Soit $f$ définie par :

$$f(x)=\int_x^{\frac{1}{x}} \frac{1-t^2}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}\,dt.$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de $f$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x)=f(\frac{1}{x})$.
3. En déduire que $f$ est identiquement nulle.

**Exercice 25 : (⋆⋆)** On pose :

$$F: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^x \frac{1}{1+\cos^2 t}\,dt. \end{array}$$

1. Montrer que $F$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in [0,\frac{\pi}{2}[$, calculer $F(x)$ en effectuant le changement de variable $t=\operatorname{Arctan}(u)$.
3. En déduire la valeur de $F(\frac{\pi}{2})$.

**Exercice 26 : (⋆⋆)**
Déterminer une primitive sur $]-1,1[$ de :

$$x \mapsto (\operatorname{Arcsin} x)^2.$$

# III Fractions rationnelles

**Exercice 27 :**
Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto \frac{1}{x^2-3x+2}$$

**Exercice 28 :**
Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto \frac{1}{9x^2+6x+5}$$

**Exercice 29 : (⋆)**
Déterminer une primitive de :

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-5x+6}$,
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+2x+1}$,
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$.

**Exercice 30 : (⋆⋆)**
Calculer les primitives de :

$$x \mapsto \frac{x}{x^4-x^2-2}.$$

**Exercice 31 : (⋆)**
Calculer les primitives des fonctions rationnelles suivantes :

a. $x \mapsto \dfrac{x^3+2x}{x^2+x+1}$

b. $x \mapsto \dfrac{2x-1}{(x+1)^2}$

c. $x \mapsto \dfrac{2x}{x^2-x+1}$

**Exercice 32 : (⋆)**
Déterminer une primitive de :

$$x \mapsto \frac{x}{x^2-x+1}.$$

**Exercice 33 : (⋆⋆)**
Montrer que :

$$\exists a,b,c \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\},\ \frac{1}{x^3+1}=\frac{a}{x+1}+\frac{bx+c}{x^2-x+1}.$$

En déduire les primitives de :

$$x \mapsto \frac{1}{x^3+1}.$$