

I Ensembles

Exercice 1 : (★★)

Montrer que :

1. $\{x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, x < \varepsilon\} = \mathbb{R}$,
2. $\{x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon\} = \{0\}$.

Exercice 2 :

Soit E l'ensemble des fonctions paires de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Les ensembles suivants sont-ils des sous-ensembles de E ?

1. $A = \{f_1, f_2\}$, où f_1 désigne la fonction constante égale à 1 et f_2 la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, f_2(x) = x^2$,
2. $B = \{g_1, g_2\}$, où g_1 désigne la fonction constante égale à 1 et g_2 la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que : $\forall x \in \mathbb{R}, g_2(x) = x^3$,
3. $C = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(-x) + f(-y)\}$.

Exercice 3 :

Soit E un ensemble, soient A et B des parties de E . Montrer que :

$$A \cup B = A \cap B \Leftrightarrow A = B.$$

Exercice 4 : (★)

Soit E un ensemble, soient A, B, C des parties de E . Montrer que :

$$A \cap B = A \cap C \Leftrightarrow A \cap \bar{B} = A \cap \bar{C}.$$

Exercice 5 : (★★)

Soit E un ensemble, soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Résoudre l'équation d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$ l'équation :

$$X \cap A = B.$$

Exercice 6 : (★) Soit E un ensemble non vide et soient A, B et C des sous-ensembles non vides de E . Montrer que :

$$(A \cup B) \setminus (A \cup C) \subset A \cup (B \setminus C).$$

L'inclusion contraire est-elle vraie ?

Exercice 7 : (★★)

Soit E un ensemble et soient A, B et C des sous-ensembles de E .

1. Montrer que :

$$A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A} \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A.$$

2. Montrer que :

$$A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset \bar{B} \Leftrightarrow B \subset \bar{A}.$$

3. Montrer que :

$$A \cup B = E \Leftrightarrow \bar{A} \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset A.$$

Exercice 8 : (★)

Soit E un ensemble. Pour tout $A, B \in \mathcal{P}(E)$, on définit la différence symétrique de A et B par :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

1. Montrer que :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

2. Montrer que :

$$\forall A, B \in \mathcal{P}(E), A \Delta B = \overline{A \cap B}.$$

3. Montrer que :

$$\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E), (A \Delta B = A \Delta C \Leftrightarrow B = C).$$

II Applications

Exercice 9 : (★)

Soit E un ensemble et soient A, B et C des sous-ensembles de E .

1. On suppose que :

$$A \cap B = A \cap C \text{ et } A \cup B = A \cup C.$$

Que peut-on dire de B et C ? (On raisonnera en utilisant les fonctions indicatrices.)

2. Même question lorsque :

$$A \cap B \subset A \cap C \text{ et } A \cup B \subset A \cup C.$$

Exercice 10 : (★)

Soient E et F deux ensembles, soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$, soient $A, B \in \mathcal{P}(F)$. Montrer que :

1. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,

2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
3. $f^{-1}(\overline{A}) = \overline{f^{-1}(A)}$,
4. $A \subset B \Rightarrow f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.

Exercice 11 : (★)

On pose $A = [-1, 2]$, $B = [-2, 1]$ et :

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2.$$

Montrer que :

$$f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B), \quad f(\overline{A}) \not\subset \overline{f(A)} \quad \text{et} \quad \overline{f(A)} \not\subset f(\overline{A}).$$

Exercice 12 : (★)

Soient E et F des ensembles, soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$ et soit Y un sous-ensemble de F . Montrer que :

$$f(f^{-1}(Y)) = Y \cap f(E).$$

Exercice 13 : (★★)

Soient E et F deux ensembles, soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$, soient $A, B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que :

1. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
3. Trouver un exemple tel que : $f(A \cap B) \neq f(A) \cap f(B)$,
4. Trouver un exemple tel que : $f(\overline{A}) \neq \overline{f(A)}$.

Exercice 14 : (★)

On considère l'application $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$. Déterminer $f^{-1}(\{1\})$, $f^{-1}([-1, 4])$, $f^{-1}(\overline{[-1, 4]})$, $f(f^{-1}([-1, 4]))$ et $f^{-1}(f([-1, 4]))$.

III Injection, surjection, bijection

Exercice 15 : (★)

Soit :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x + y, xy).$$

f est-elle injective? surjective?

Exercice 16 : (★)

Soit :

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \mapsto (y, z, x).$$

Montrer que f est bijective et déterminer f^{-1} .

Exercice 17 : (★★)

Soient :

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{et} \quad g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto 2n \quad \text{et} \quad n \mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

1. Etudier l'injectivité et la surjectivité de f et de g .
2. Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Que peut-on en conclure?

Exercice 18 : (★★)

On considère l'application :

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \mapsto (x, xy - y^3).$$

f est-elle injective? surjective?

Exercice 19 : (★★)

$$\text{Soit } f: \mathbb{C} \setminus \{i\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{1\} \\ z \mapsto \frac{z+i}{z-i}.$$

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{U} \setminus \{i\})$ et $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$.

Exercice 20 : (★★) Soit E un ensemble, soit $f \in \mathcal{F}(E, E)$ telle que : $f \circ f \circ f = f$. Montrer que :

$$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective.}$$

Exercice 21 : (★★★)

Soit E un ensemble et soient A et B des parties non vides de E . On considère l'application :

$$f: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X \mapsto (A \cap X, B \cap X).$$

1. Montrer que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Expliciter f^{-1} dans le cas où f est bijective.