

## I Limite d'une suite réelle

### Exercice 1 : (★★★) ✨

- Montrer et utiliser que, pour  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $f^{-1}(\llbracket 0, N-1 \rrbracket)$  est fini et admet un plus grand élément.
- Montrer et utiliser que, pour  $N \in \mathbb{N}^*$ ,  $f(\llbracket 0, N-1 \rrbracket)$  est fini et admet un plus grand élément.
- Utiliser les questions précédentes.

### Exercice 2 : 📖

Utiliser la quantité conjuguée.

*Solution* :  $\frac{a+b}{2}$

### Exercice 3 : 📖 ✨

- Utiliser la quantité conjuguée.  
*Solution* : 1
- Utiliser la quantité conjuguée.  
*Solution* : 0
- Utiliser la quantité conjuguée.  
*Solution* : -1

### Exercice 4 : (★)

- Solution* : 0
- Faire des cas selon la position relative de  $a$  et  $b$ .  
*Solution* : 0 si  $a = b$ , -1 si  $b > a$ , 1 si  $a > b$
- Factoriser par le terme dominant.  
*Solution* :  $\frac{1}{5}$
- Factoriser par le terme dominant.  
*Solution* :  $\frac{2}{5}$
- Utiliser la quantité conjuguée.  
*Solution* : 0

### Exercice 5 : 📖

- Utiliser l'exponentielle et le logarithme.  
*Solution* :  $e$
- Utiliser l'exponentielle et le logarithme.  
*Solution* : 1
- Utiliser l'exponentielle et le logarithme.  
*Solution* : 1
- Utiliser l'exponentielle et le logarithme.  
*Solution* :  $e^{-1}$

### Exercice 6 : (★)

- Utiliser une majoration de  $(u_n)$  à partir d'un certain rang.
- Utiliser une minoration de  $(u_n)$  à partir d'un certain rang.
- Solution* :  $\lim u_n = e$  et  $\lim \sqrt[n]{u_n} = 1$ .

### Exercice 7 : (★) ✨

- Etudier les cas  $x \leq y$  et  $x > y$ .
- Solution* :  $\lim x_n = \sup(\lim u_n, \lim v_n)$ ,  $\lim y_n = \inf(\lim u_n, \lim v_n)$

### Exercice 8 : 📖

Montrer que  $0 \leq a - u_n \leq (a + b) - (u_n + v_n)$  et utiliser le théorème d'encadrement.

### Exercice 9 : 📖

- Utiliser des inégalités.  
*Solution* : 1
- Utiliser des inégalités.  
*Solution* :  $\frac{x}{2}$

### Exercice 10 : (★)

Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ .

*Solution* :  $\lim u_n = 1$

### Exercice 11 : (★)

Remarquer que, pour  $1 \leq k \leq n-2$ ,  $k! \leq (n-2)!$  et utiliser le théorème d'encadrement.

*Solution* :  $\lim u_n = 1$

### Exercice 12 : (★★) ✨

Remarquer que  $2nu_{n+1} \leq n(u_n + u_{n+1}) \leq 2nu_n$  et utiliser le théorème d'encadrement.

## II Suites monotones

### Exercice 13 : (★★) ✨

1. Remarquer que  $\sup B$  est un majorant de  $A$ .
2. Remarquer que  $\max(\sup A, \sup B)$  est un majorant de  $A \cup B$ . Pour calculer  $\sup(A \cup B)$ , remarquer que  $A \subset A \cup B$ .  
*Solution* :  $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ .
3. Remarquer que  $\min(\sup A, \sup B)$  est un majorant de  $A \cap B$ . On peut avoir  $A \cap B = \emptyset$  donc  $\sup(A \cap B)$  n'existe pas toujours.

### Exercice 14 : (★★)

Commencer par déterminer intuitivement les bornes supérieures et inférieures.

1. *Solution* :  $\inf(A) = -1, \sup(B) = 1$
2. *Solution* :  $\inf(B) = -1, \sup(C) = 1$

### Exercice 15 : (★★) 🦋 ✨

Soient  $x, y \in A$ , montrer que  $|x - y| \leq \sup A - \inf A$ , ainsi  $d(A) \leq \sup A - \inf A$ .  
Soit  $\varepsilon > 0$ , comme  $\sup A - \varepsilon < \sup A$ , il existe  $x \in A$  tel que  $x \geq \sup A - \varepsilon$  et comme  $\inf A + \varepsilon > \inf A$ , il existe  $y \in A$  tel que  $y \leq \inf A + \varepsilon$ , calculer  $|x - y|$  pour conclure.  
On a donc,  $\forall \varepsilon > 0, \sup A - \inf A - 2\varepsilon \leq d(A) \leq \sup A - \inf A$  et faire tendre  $\varepsilon$  vers 0.  
*Solution* :  $d(A) = \sup(A) - \inf(A)$

### Exercice 16 : (★)

Remarquer que  $a - \frac{1}{n}$  n'est pas un majorant de  $A$  pour construire  $u_n$ .

### Exercice 17 : (★★)

1. Montrer que  $x \mapsto \ln(x) + x$  est bijective de  $]0, +\infty[$  vers  $\mathbb{R}$ .
2. Utiliser la croissance de  $x \mapsto \ln(x) + x$ .
3. Raisonner par l'absurde.

### Exercice 18 : (★)

1. Raisonner par récurrence.
2. Utiliser les propriétés du carré.
3. Raisonner par l'absurde.
4. *Solution* :  $\lim u_n = +\infty$ .

### Exercice 19 : (★★)

Raisonner par récurrence pour montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < v_n < 1$ , puis montrer que  $(v_n)$  est croissante. Sa limite est dans  $[0, 1]$ . Chercher une autre inégalité pour conclure.  
*Solution* :  $\lim v_n = 1$

### Exercice 20 : (★)

Etudier la monotonie et chercher à majorer ou minorer la suite.  
*Solution* : La suite  $(u_n)$  est décroissante et converge vers 1.

### Exercice 21 : (★)

Etudier la monotonie et chercher à majorer ou minorer la suite.  
*Solution* : La suite  $(u_n)$  est décroissante et converge vers  $\frac{1}{4}$ .

### Exercice 22 : (★★)

Dans le cas  $u_0 < 0$ , étudier la suite à partir du rang 1. Se ramener à l'étude de trois intervalles stables :  $[0, \frac{1}{4}]$ ,  $[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$  et  $[\frac{3}{4}, +\infty[$   
*Solution* : La suite  $(u_n)$  converge vers  $\frac{1}{4}$  si  $u_0 \in ]-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}[$ , la suite  $(u_n)$  converge vers  $\frac{3}{4}$  si  $u_0 = \pm \frac{3}{4}$  et sinon, la suite  $(u_n)$  diverge vers  $+\infty$ .

### Exercice 23 : (★★) 🦋 ✨

Etudier la monotonie et chercher à majorer ou minorer la suite.  
*Solution* : Soit  $\alpha$  l'unique réel non nul tel que  $\ln(1 + 2\alpha) = \alpha$ .

Si  $u_0 = 0$ , alors  $(u_n)$  est constante égale à 0.

Si  $u_0 = \alpha$ , alors  $(u_n)$  est constante égale à  $\alpha$ .

Si  $u_0 \in ]0, \alpha[$ , alors  $(u_n)$  est convergente vers  $\alpha$ .

Si  $u_0 \in ]\alpha, +\infty[$ , alors  $(u_n)$  est convergente vers  $\alpha$ .

Si  $u_0 < 0$ , alors  $(u_n)$  n'est pas définie.

### Exercice 24 : (★)

1. Raisonner par récurrence.
2. Raisonner par récurrence.
3. Utiliser la définition.

### Exercice 25 : (★) 🦋

- Etudier la fonction  $f : x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$  sur  $[0, 2]$  : on montrera que  $f$  est croissante et que  $[0, 2]$  est stable par  $f$ .
- Montrer, par récurrence, que  $(u_n)$  est croissante et  $(v_n)$  est décroissante.
- En déduire que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont convergentes (elles appartiennent à  $[0, 2]$ )
- Résoudre  $f(x) = x$  sur  $[0, 2]$  : l'équation admet une unique solution :  $l = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ .
- En déduire que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  convergent vers  $l$ .
- Conclure.

### Exercice 26 : (★★)

1. Utiliser la définition des suites adjacentes.
2. Raisonner par l'absurde.

**Exercice 27 : (★★)**


1. Faire des calculs.
2. Remarquer que  $(n+1)(1 + \frac{1}{n})^{\alpha+1} \geq (n+1)(1 + \frac{1}{n}) \geq n+2$ .

**III Suites extraites****Exercice 28 :** 



Utiliser des suites extraites bien choisies.

**Exercice 29 : (★)**

Montrer que  $\lim x_{2n} = \lim x_{2n+1}$  en faisant apparaître les termes  $x_{6n} = x_{2.(3n)} = x_{3.(2n)}$  et  $x_{6n+3} = x_{2.(3n+1)+1} = x_{3.(2n+1)}$ .

**Exercice 30 : (★★)** 

1. Minorer par une somme de termes constants.
2. Montrer que  $(H_n)$  est croissante et raisonner en supposant que  $(H_n)$  converge vers une limite finie.

**Exercice 31 : (★)**  


Soit  $p$  une période de la suite  $(u_n)$ , posons  $l = \lim u_n$ , soit  $n_0 \in \mathbb{N}$ , alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n_0+np} = u_{n_0}.$$

De plus, la suite  $(u_{n_0+np})_{n \in \mathbb{N}}$  est extraite de  $(u_n)$  donc converge vers  $l$ .  
En déduire que  $u_{n_0} = l$  et conclure.

**Exercice 32 : (★★)**

Utiliser la définition des suites adjacentes.

**Exercice 33 : (★★★)** 

Si on suppose l'existence de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n\alpha)$ , calculer  $\cos((n+1)\alpha)$  et exprimer  $\sin(n\alpha)$  en fonction de ces quantités.

Utiliser la relation  $\cos^2 + \sin^2 = 1$  pour en déduire une contradiction.

*Solution : Les suites  $(\cos(n\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\cos(n\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$  n'ont pas de limites.*

**IV Suites complexes****Exercice 34 : (★)**

1. Montrer que la suite  $(z_n)$  est géométrique.

*Solution :  $\lim z_n = 0$*

2. La suite  $(z_n)$  est arithmético-géométrique.

*Solution :  $\lim z_n = \frac{2}{2-i}$*