

I Limite d'une fonction en un point

Exercice 1 :

- Factoriser par le terme dominant.
Solution : $\frac{1}{5}$
- Utiliser la quantité conjuguée.
Solution : 1
- Utiliser la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$.
Solution : 5
- Factoriser par le terme dominant.
Solution : $+\infty$
- Transformer la puissance en exponentielles.
Solution : e^2

Exercice 2 :

- Solution* : $+\infty$
- Utiliser la limite en 0 de $\frac{\sin x}{x}$.
Solution : $-\frac{2}{3}$
- Utiliser les limites en 0 de $\frac{\sin x}{x}$ et de $\frac{1-\cos x}{x^2}$.
Solution : $\frac{1}{2}$
- Etudier les limites en 0^+ et en 0^- .
Solution : La limite n'existe pas.
- Factoriser et utiliser un taux d'accroissement.
Solution : $\frac{\sin a \cos a}{a}$

Exercice 3 : (★)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_0 + nT) = +\infty$ donc, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_0 + nT) = a$. En déduire que $f(x_0) = a$.

Exercice 4 : (★★)

Appliquer la caractérisation séquentielle de la limite à la suite : $x_n = \frac{1}{2n}$ pour montrer que f n'a pas de limite finie en 0 puis à la suite $y_n = \frac{1}{2n+1}$ pour montrer que f n'a pas de limite en 0.
Solution : f n'admet pas de limite en 0.

Exercice 5 :

- Calculer les limites à gauche et à droite en utilisant le théorème d'encadrement.
Solution : 1
- Remarquer que, au voisinage de 2, f est nulle.
Solution : 0
- Calculer les limites à gauche et à droite.
Solution : f n'a pas de limite en $\frac{1}{2}$.
- Remarquer que, au voisinage de $\frac{2}{3}$, $f(x) = x$.
Solution : $\frac{2}{3}$
- Remarquer que, au voisinage de $+\infty$, f est nulle.
Solution : 0

Exercice 6 :

Utiliser des encadrements.

Solution : 0

Exercice 7 : (★)

- Remarquer que \cos est bornée.
Solution : $\lim_a f = 0$
- Trouver deux suites tendant vers 0 telles que l'image par f de ces suites n'ait pas la même limite.
Solution : f n'a pas de limite en a .
- Raisonner par minoration.
Solution : $\lim_a f = +\infty$
- Calculer les limites en a^+ et a^- .
Solution : f n'a pas de limite en a .

II Continuité en un point

Exercice 8 :

- f est clairement continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Etudier les limites à gauche et à droite des entiers relatifs.
Solution : f est continue sur \mathbb{R} .

2. f est clairement continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Etudier les limites à gauche et à droite des entiers relatifs.

Solution : f est continue sur \mathbb{R} .

3. f est clairement continue sur \mathbb{R}^* . Etudier la limite en 0.

Solution : f est continue sur \mathbb{R} .

4. f est clairement continue sur \mathbb{R}^* . Pour étudier la limite en 0, remarquer que $\frac{e^{\arctan x} - 1}{x} = \frac{e^{\arctan x} - 1}{\text{Arctan } x} \cdot \frac{\text{Arctan } x}{x}$ et utiliser des taux d'accroissement.

Solution : f est continue sur \mathbb{R} .

Exercice 9 : (★)

1. Etudier la limite en 0^+ et en 0^- .

Solution : f est prolongeable par continuité en 0 avec $f(0) = 1$.

2. Etudier la limite en 0^+ et en 0^- .

Solution : f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

3. Etudier la limite en 0^+ et en 0^- .

Solution : f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

4. Calculer la limite en 0 en utilisant l'exponentielle et le logarithme.

Solution : f est prolongeable par continuité en 0 avec $f(0) = e$.

5. Utiliser le fait que \cos n'a pas de limite en $+\infty$

Solution : f n'est pas prolongeable par continuité en 0.

6. Remarquer que \cos est borné.

Solution : f est prolongeable par continuité en 0 avec $f(0) = 0$.

Exercice 10 : (★)

Raisonner par analyse-synthèse et montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f\left(\frac{x}{3^n}\right)$.

Solution : Les applications constantes.

Exercice 11 : (★★) ✨

1. Utiliser que tout réel est limite d'une suite de rationnels.

2. (a) Utiliser que tout réel est limite d'une suite de rationnels.

(b) Trouver un contre-exemple. On peut prendre : $f(x) = |x - \sqrt{2}|$ et $g(x) = 2|x - \sqrt{2}|$.

III Continuité sur un intervalle

Exercice 12 : 📖

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $x \mapsto x^{17} - x^{11} - 1$.

Exercice 13 : (★) ✨

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $x \mapsto f(x) - \lambda g(x)$.

Exercice 14 : (★)

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $x \mapsto f(a) - 2f(x) + f(b)$.

Exercice 15 : (★) ✨

Raisonner par analyse-synthèse et montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ ou 1. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour conclure.

Solution : $f = 0$ ou $f = 1$

Exercice 16 : (★)

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $g : x \mapsto f\left(x + \frac{1}{2}\right) - f(x)$.

Exercice 17 : (★★)

Appliquer le théorème des valeurs intermédiaires à $g : x \mapsto f(x) - x$.

Exercice 18 : (★★) 📢 ✨

Posons $g : \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$. Supposons que g ne s'annule pas. En déduire, avec le théorème des valeurs intermédiaires, que g est de signe constant.

Supposons, par exemple, $g > 0$. Soit $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, on a $g\left(\frac{k}{n}\right) > 0$. Donc : $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) > 0$. Mon-

trer que : $\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) = f(1) - f(0)$ puis en déduire une contradiction.

Exercice 19 : (★★) ✨

Supposer f non monotone. En choisissant bien a, b, x, y , utiliser la fonction $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f((1-t)b + ty) - f((1-t)a + tx)$.

Exercice 20 : (★)

Pour $f \circ g$ bornée, utiliser la définition d'une bornée.

Pour $g \circ f$ se ramener à l'étude de g sur un segment.

Exercice 21 : (★★)

Utiliser la définition de la limite afin de restreindre l'ensemble \mathbb{R}^{+*} pour se ramener à un segment.

Exercice 22 : (★) ✨

Remarquer que f est bornée au voisinage de $\pm\infty$ puis se ramener à l'étude sur un segment.

Exercice 23 : (★★)

Justifier et utiliser le fait que la borne supérieure sur $[a, b]$ est atteinte. Traiter les cas où elle est atteinte sur $]a, b[$ puis en a ou en b .

Exercice 24 : (★★) ✨

1. Remarquer que $t \mapsto f(t) + xg(t)$ est continue sur un segment.
2. Pour la majoration, majorer $f(t) + (x + h)g(t)$ et pour la minoration, utiliser un point où $M(x + h)$ est atteint.
3. Appliquer la question précédente à un h bien choisi et faire un passage à la limite dans l'inégalité obtenue.

Exercice 25 : (★)

1. Montrer que f est strictement décroissante, continue et étudier ses limites en 0 et 1.
2. Justifier que f^{-1} est continue et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(2^{-n}) = f^{-1}(0)$.

Solution : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(2^{-n}) = \frac{1}{2}$.

Exercice 26 : (★)

1. *Solution :* $f(\frac{1}{x}) = f(x)$

2. φ est continue, strictement décroissante donc est bijective de $] - 1, 1[$ vers $] \lim_1 \varphi, \lim_{-1} \varphi = \dots = \mathbb{R}$.

3. Faire deux cas : $] - 1, 1[$ et $\mathbb{R} \setminus] - 1, 1[$.

- Si $x \in] - 1, 1[$, alors $\varphi^{-1} \circ f(x) = \varphi^{-1} \circ \varphi(x) = x$.
- Si $x \in \mathbb{R} \setminus] - 1, 1[$, alors $\varphi^{-1} \circ f(x) = \varphi^{-1} \circ f(\frac{1}{x})$. Conclure en remarquant que $\frac{1}{x} \in] - 1, 1[$.

Solution :

$$\varphi^{-1} \circ f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow] - 1, 1[$$

$$x \mapsto \begin{cases} x & \text{si } |x| < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Exercice 27 : (★★)

Montrer que f est injective puis surjective.

Utiliser que tout nombre réel est limite d'une suite de rationnels.