Indications du chapitre 13 : Dérivabilité

I Nombre dérivé, fonction dérivée

Exercice 1 :
Remarquer que $\frac{f(a+h^2)-f(a+h)}{h} = h\frac{f(a+h^2)-f(a)}{h^2} + \frac{f(a)-f(a+h)}{h}$.
Solution : $-f'(a)$

Exercice 2 : ($\star$)
Remarquer que $\frac{f(b_n)-f(a_n)}{b_n-a_n} = \frac{f(b_n)-f(0)}{b_n-0} + \frac{a_n}{b_n-a_n}\left(\frac{f(b_n)-f(0)}{b_n-0} - \frac{f(0)-f(a_n)}{0-a_n}\right)$.

Exercice 3 : ($\star$)

1. Encadrer le taux d'accroissement en 0.
2. *Solution :* $\lim f'(u_n) = -\infty$ *et* $\lim f'(v_n) = +\infty$.
3. Remarquer que $\lim u_n = \lim v_n = 0$.

Exercice 4 : ($\star$)

1. Simplifier le taux d'accroissement en 0.
   Solution : si $n > 2$, f_1 *est dérivable en* 0 *et* $f_1'(0) = 0$, *si* $n = 2$, f_1 *est dérivable en* 0 *et* $f_1'(0) = 1$,*sinon* f_1 *n'est pas dérivable en* 0.
2. *Solution :* f_2 *n'est pas dérivable en* 0
3. *Solution :* f_3 *est dérivable en* 0 *et* $f_4'(0) = 0$

Exercice 5 :

1. Montrer que f est continue, stricetement croissante et étudier ses limites en $\frac{\pi}{2}$ et en π.
   Solution : f *réalise une bijection vers* $[1, +\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable et que f' ne s'annule pas.
   Solution : $\forall x \in]1, +\infty[$, $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$.

II Propriétés des fonctions dérivables

Exercice 6 :
Pour $n \in \mathbb{Z}$, remarquer que $f(nT) = f((n+1)T$ et appliquer le théorème de Rolle.

Exercice 7 :
Appliquer deux fois le théorème de Rolle à $x \mapsto f(x) - x$ puis à f'.

Exercice 8 : ($\star$)
Appliquer le théorème de Rolle à $x \mapsto x^\lambda f(x)$.

Exercice 9 : ($\star$)
Appliquer le théorème de Rolle à $x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$.

Exercice 10 : ($\star\star$)

1. Le seul problème est la continuité en 0.
2. Montrer que $g(0) = g(1)$ et appliquer le théorème de Rolle à la fonction g.

Exercice 11 : ($\star\star$)
Se ramener à la recherche d'un extremum sur un segment.

Exercice 12 : ($\star$)
Raisonner par récurrence sur l et appliquer le théorème de Rolle.

Exercice 13 : ($\star\star$)

1. On pose $h : x \mapsto (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$. Montrer que $h(a) = h(b)$ et appliquer le théorème de Rolle à h.
2. On applique le résultat de la question précédente à x_0 et à x voisin de x_0 : Il existe $c_x \in]x_0, x[$ ou $]x, x_0[$ tel que : $f'(c_x)(g(x) - g(x_0)) = g'(c_x)(f(x) - f(x_0))$. Donc : $f'(c_x)g(x) = g'(c_x)f(x)$. Montrer que $g(x) \neq 0$ en raisonnant par l'absurde et en appliquant le théorème de Rolle. Comme $\lim\limits_{x\to x_0} c_x = x_0$, on a : $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = l$. Conclure.
3. *Solution :* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x^3} = \dfrac{1}{6}$, $\quad \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$.

Exercice 14 :
Appliquer l'inégalité des accroissements finis à $x \mapsto \ln x$ sur l'intervalle $[k, k+1]$.

Exercice 15 : ($\star$) Appliquer le théorème des accroissements finis entre 0 et x à la fonction : $t \mapsto f(t) - f(-t)$.

Exercice 16 : (⋆)
Comme : $\forall t \in [x, x+1]$, $\frac{1}{x+1} \leq \ln'(t) \leq \frac{1}{x}$, on a, en appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction ln entre x et $x+1$:

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln(x) \leq \frac{1}{x}.$$

Donc $\dfrac{1}{x+1} \leq \ln\dfrac{x+1}{x}$, ainsi, $1 \leq (x+1)\ln\dfrac{x+1}{x}$, donc, par passage à l'exponentielle : $e \leq \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}$.
Raisonner de même pour l'autre membre de l'inégalité.
On effectue une preuve par récurrence pour le second point.

- Pour $n = 1, \dots$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que :

$$\frac{(n+1)^n}{n!} \leq e^n \leq \frac{(n+1)^{n+1}}{n!} \quad (1)$$

En appliquant la première inégalité à $x = n+1$, on a :

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} \leq e \leq \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} \quad (2)$$

Faire le produit de (1) et (2) pour conclure.

Exercice 17 :

1. Utiliser la fonction $\left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right] \to \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$, $x \mapsto 2 + \frac{1}{2}\sin x$.
   Solution : (u_n) *converge vers l'unique* $l \in \left[\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right]$ *tel que* $2 + \frac{1}{2}\sin l = l$.
2. Utiliser la fonction $[-1,1] \to [-1,1]$, $x \mapsto \cos x$.
   Solution : (u_n) *converge vers l'unique* $l \in [-1,1]$ *tel que* $\cos l = l$.

Exercice 18 : (⋆)

1. Faire une étude de fonctions.
2. Appliquer l'inégalité des accroissements finis à $x \mapsto \ln(1+x)$ sur $[0, x]$ ou $[x, 0]$.
3. Effectuer le changement de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$, remarquer que : $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t \leq t$ et faire une étude de fonctions.
4. Appliquer l'inégalité des accroissements finis à $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$ sur $[x, y]$.

Exercice 19 : Utiliser le théorème de la limite de la dérivée.

Exercice 20 : (⋆⋆)
Résoudre l'équation sur $]-\infty, 0[$, sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ puis utiliser le théorème de la limite de la dérivée.
Solution : Pas de solution sur $\mathbb{R}$

Exercice 21 : (⋆⋆)
Résoudre l'équation sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ puis utiliser le théorème de la limite de la dérivée.
Solution : $\left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \lambda_1 x^2 + \frac{x^4}{2} & si \quad x \geq 0 \\ \lambda_2 x^2 + \frac{x^4}{2} & si \quad x < 0 \end{cases} \end{array}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 22 : (⋆⋆)
Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ puis chercher les solutions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.
Solution : $\left\{ \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \lambda_1 \cos x + (\lambda_2 + 2)\sin x - x + 1 & si \quad x \leq 0 \\ \lambda_1 \cos x + \lambda_2 \sin x + x + 1 & si \quad x > 0 \end{cases} \end{array}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$

III Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$

Exercice 23 :
Appliquer la formule de Leibnitz.
Solution : $x \mapsto 2^n(x^2+1)e^{2x} + 2^n n x e^{2x} + n(n-1)2^{n-2}e^{2x}$

Exercice 24 :

1. Prouver que $\cos^3 x = \frac{1}{4}\operatorname{Re}(e^{3ix} + 3e^{ix})$.
   Solution : $f_1^{(n)}(x) = \frac{1}{4}\left(3^n \cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) + 3\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)\right)$
2. Utiliser $f_2(x) = \operatorname{Im}\left(e^{(1+i)x}\right)$.
   Solution : $f_2^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$
3. Utiliser la formule de Leibnitz.
   Solution : $f_3^{(n)}(x) = (-1)^n e^{-x}\left(x^3 + (1-3n)x^2 + (3n^2 - 5n)x + 1 + n(n-1)(3-n)\right)$

Exercice 25 : (⋆⋆)
Utiliser la formule de Leibnitz et étudier le coefficient dominant de l'expression trouvée pour en déduire la somme.
Solution : $f^{(n)}(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 x^{n-k}(1+x)^k$ *et* $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

Exercice 26 : (⋆⋆)
Avoir l'intuition de la formule puis la prouver par récurrence en remarquant que $f_{n+1}(x) = x.f_n(x)$.
Solution : $f_n^{(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1}}{x^{n+2}} e^{1/x}$.

Exercice 27 : (⋆⋆)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer par récurrence que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $\forall x \in [0,1]$, $|f^{(n-k)}(x)| \leq x^{k+1}$. Pour cela, on pourra appliquer le théorème des accroissements finis.
En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [0,1[$, $|f(x)| \leq x^{n+1}$ et faire tendre n vers $+\infty$.

IV Fonctions convexes

Exercice 28 :
Montrer que la fonction $x \mapsto -\ln(\ln x)$ est convexe.

Exercice 29 : (⋆)

1. Calculer $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ et utiliser la croissance du taux d'accroissment.
2. *Solution :* $x \mapsto e^{-x}$.

Exercice 30 : (⋆⋆)
Soient $x, y \in [0, \frac{1}{2}]$ tels que $x \leq y$. Montrer qu'il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $y = \lambda x + (1-\lambda)(1-x)$ et appliquer la convexité aux points y et $1-y$.

Exercice 31 : (⋆⋆)
Raisonner par analyse-synthèse.
Solution : $x \mapsto ax + b, \quad a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 32 : (⋆ ⋆ ⋆)

1. Raisonner par récurrence sur n.
2. Applications :
   (a) Appliquer l'inégalité de Jensen à la fonction $-\ln$ avec les coefficients $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$.
   (b) Montrer que la fonction $x \mapsto \left(x + \frac{1}{x}\right)^2$ est convexe et appliquer l'inégalité de Jensen.