Indications du chapitre 14 : Polynômes

I L'ensemble $\mathbb{K}[X]$

Exercice 1 : ($\star$)

1. Montrer que $\deg(P+Q) \leq n$ et calculer le coefficient de X^n et de X^{n-1}.
   Solution : si n est pair, $\deg(P+Q) = n$, *si n est impair,* $\deg(P+Q) = n-1$.
2. Montrer que $\deg(P-Q) \leq n$ et calculer le coefficient de X^n et de X^{n-1}.
   Solution : $\deg(P-Q) = n-1$ *si n impair,* $n-2$ *si n pair et* $n \neq 2$, $-\infty$ *si* $n = 2$.

Exercice 2 : ($\star$)
Montrer que si P est solution alors P est de degré 2 puis raisonner par coefficients indéterminés.
Solution : $\{a(X^2-1),\ a \in \mathbb{K}\}$

II Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 3 :
Utiliser la formule du binôme de Newton.

Exercice 4 : ($\star\star$)
Remarquer que $P\circ P - X = (P\circ P - P) + (P - X)$ puis écrire P sous la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et utiliser la factorisation de $P^k - X^k$.
Poser $P = X^2 - 3X + 1$ et calculer $P \circ P - X$.
Solution : $\{2 \pm \sqrt{3}, 1 \pm \sqrt{2}\}$

Exercice 5 :

1. *Solution :* $Q = X + 8$, $R = 47X^2 - 13X - 26$
2. *Solution :* $Q = \frac{1+i}{2}X + \frac{-1+2i}{2}$, $R = \frac{-5-4i}{2}X + \frac{5-8i}{2}$

Exercice 6 :

1. *Solution :* $Q = 2X^2 + 3X + 11$, $R = 25X - 5$
2. *Solution :* $Q = X^2 + (1-2i)X - (2+3i)$, $R = -(5+i)$

Exercice 7 : ($\star$)
Remarquer que R est de la forme $aX + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ et évaluer en des valeurs intéressantes.
Solution : $R = 1$

Exercice 8 : ($\star\star$)

1. On a $X^n = ((X^p - a) + a)^q X^r$. Donc, d'après la formule du binôme de Newton :
$$X^n = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} (X^p - a)^k a^{q-k} X^r$$
$$= (X^p - a) \sum_{k=1}^{q} \binom{q}{k} (X^p - a)^{k-1} a^{q-k} X^r + a^q X^r.$$
   Conclure.
2. Raisonner de même qu'à la question précédente, avec :
$$X^n - a^n = ((X^p - a^p) + a^p)^q X^r - a^n.$$
   Solution : $R = a^{pq} X^r - a^n$
3. Ecrire les restes de divisions euclidiennes de X^{12}, $8X^{11}$, $5(X^6-1)$, $-3X^4$ et X^2 par $X^3 - 1$.
   Solution : $R = 9X^2 - 3X + 1$

III Evaluation polynomiale et racines

Exercice 9 :
Remarquer que $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ et montrer que 1 et 2 sont racines de $(X-2)^{2n} + (X-1)^n - 1$.

Exercice 10 : ($\star$)
Chercher a et b tels que i et $-i$ soient racines de $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 1$.
Solution : $(a, b) = (2, 1)$.

Exercice 11 : ($\star\star$)
Montrer que $(X-2) | (P-1)$. *Solution :* $((X-2)R + 1, -X + 5 - (X^2 - 5X + 7)R)$, $R \in \mathbb{C}[X]$.

Exercice 12 : ($\star\star$)

1. Avoir l'intuition du résultat puis le prouver par récurrence.
   Solution : T_n *est de degré n et de coefficient dominant* 2^{n-1} *si* $n \neq 0$, 1 *si* $n = 0$.

2. Montrer que T_n vérifie la relation, puis, pour l'unicité, se ramener à un polynôme admettant une infinité de racines.
3. En utilisant la relation précédente, trouver n racines de T_n. Justifier que ce sont les seules.
Solution : $\cos \frac{(2k+1)\pi}{2n}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$

Exercice 13 :
Considérer un polynôme T-périodique et montrer que le polynôme $P(X) - P(0)$ admet une infinité de racines.
Solution : L'ensemble des polynômes constants.

Exercice 14 :
1. (s, p) sont solutions d'un système linéaire.
Solution : $s = 1$, $p = -2$
2. x et y sont racines du polynôme $X^2 - X - 2$.
Solution : $(x, y) = (2, -1)$ *ou* $(-1, 2)$

IV Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

Exercice 15 :
Pour Q, utiliser le degré de la somme de deux polynômes de degrés distincts, pour R obtenir une inégalité en utilisant la somme de deux polynômes puis étudier les coefficients dominants de XP' et P.
Solution : $\deg(Q) = n+1$, $\deg(R) = n$.

Exercice 16 : (⋆)
Déterminer le degré de P en raisonnant sur son coefficient dominant.
Solution : $P = X^2 - X + c$, $c \in \mathbb{R}$.

Exercice 17 : (⋆⋆)
Déterminer le degré de P en raisonnant sur son coefficient dominant.
Solution : $P = aX$, $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 18 : (⋆)
1. Calculer le degré et le coefficient dominant de $(X^2-1)^n$.
Solution : L_n *est de degré n et de coefficient dominant* $\frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$
2. Appliquer la formule de Leibnitz à $(X+1)^n$ et $(X-1)^n$.
Solution : $L_n(1) = 1$, $L_n(-1) = (-1)^n$

Exercice 19 : (⋆)
Utiliser la somme des racines et calculer les deux premiers coefficients de $P^{(j)}$.

Exercice 20 :
Appliquer la formule de Taylor au point 0.

Exercice 21 : Montrer que 1 est racine au moins double (resp. triple) du polynôme.

Exercice 22 : (⋆)
1. *Solution :* $P(X) - P'(X) = \frac{X^n}{n!}$.
2. Raisonner par l'absurde.

Exercice 23 : (⋆⋆)
Montrer que b et $-b$ sont racines doubles de P' pour avoir la forme de P'.
Solution : $\frac{15a}{8b^5}\left(\frac{1}{5}X^5 - \frac{2b^2}{3}X^3 + b^4 X\right)$

Exercice 24 :
Calculer $P(1)$, $P'(1)$, $P''(1)$, … jusqu'à arriver à une dérivée non nulle.
Solution : 1 est racine de multiplicité 4

Exercice 25 : (⋆ ⋆ ⋆)
Déterminer une relation vérifiée par les racines de P' et réinjecter dans P. En déduire que les racines doubles éventuelles de P sont des racines $n-1$-èmes de l'unité puis que ce sont $-j$ ou $-j^2$.
Solution : P admet une racine double ssi $6 | n-1$

Exercice 26 : (⋆) Etudier la multiplicité des racines et appliquer le théorème de Rolle entre deux racines successives.

V Polynômes irréductibles

Exercice 27 : (⋆⋆)
Ecrire P sous forme factorisée et faire deux cas : si P admet au moins deux racines distinctes et si P n'admet qu'une racine.

Exercice 28 : (⋆⋆)
1. Montrer que $(\alpha+1)^2$ et $(\alpha-1)^2$ sont racines de P. On veut montrer que $|(\alpha+1)^2| > |\alpha|$ ou $|(\alpha-1)^2| > |\alpha|$. On raisonne par l'absurde : supposons $|(\alpha+1)^2| \leq |\alpha|$ et $|(\alpha-1)^2| \leq |\alpha|$. Alors : $|\alpha+1|^2 + |\alpha-1|^2 \leq 2|\alpha|$. Montrer que : $2(\mathrm{Re}\,(\alpha))^2 + 2(\mathrm{Im}\,(\alpha))^2 + 2 \leq 2|\alpha|$ puis que $|\alpha|^2 - |\alpha| + 1 \leq 0$. En déduire une contradiction en étudiant le signe du polynôme $X^2 - X + 1$.

2. Si α est racine de P, alors on peut construire une suite strictement croissante en module de racines de P donc P admet une infinité de racines. En déduire que P est constant puis effectuer une synthèse.
Solution : $P = 0$ *ou* $P = 1$.

Exercice 29 : ($\star\star$)

1. Commencer par déteminer la décomposition en polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ de $(X-1)P_n$.
Solution : $\prod_{k=1}^{n}(X - e^{\frac{2ik\pi}{n+1}})$
2. Calculer et simplifier $P_n(1)$.
Solution : $\frac{n+1}{2^n}$

Exercice 30 :

1. Utiliser les complexes.
Solution :$(X^2+1)(X^2-2X+2)$
2. *Solution :*$(X+1)(X-3)^2$
3. Utiliser les complexes.
Solution :$(X^2-2X+2)(X^2+4)$
4. Remarquer que le polynôme est égal à $(X+1)^6 - X^6$.
Solution :$(2X+1)(3X^2+3X+1)(X^2+X+1)$

Exercice 31 : ($\star$)
Commencer par chercher les racines de P' afin d'obtenir la racine multiple de P.
Solution :$P = (X-2)^2(X+2+\sqrt{6})(X+2-\sqrt{6})$

Exercice 32 : ($\star$) Utiliser les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité et les rassembler avec leur conjugués.
Solution : $P = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{2ik\pi/n})$ *et,*
si $n = 2p$, $P = (X-1)(X+1)\prod_{k=1}^{p-1}(X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}X+1)$,
si $n = 2p+1$, $P = (X-1)\prod_{k=1}^{p}(X^2 - 2\cos\frac{2k\pi}{n}X+1)$

Exercice 33 : ($\star$)
On a : $X^2 - 2(\cos a)X + 1 = (X - e^{ia})(X - e^{-ia})$ donc : $X^{2n} - 2(\cos a)X^n + 1 = (X^n - e^{ia})(X^n - e^{-ia})$. Or les racines de $X^n - e^{ia}$ sont les racines n-ièmes de e^{ia}, c'est-à-dire $e^{i(a+2k\pi)/n}$, $k \in [\![0, n-1]\!]$. Donc :

$$X^n - e^{ia} = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{i(a+2k\pi)/n}).$$

D'où :

$$X^{2n} - 2(\cos a)X^n + 1 = \prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{i(a+2k\pi)/n})(X - e^{-i(a+2k\pi)/n}).$$

Solution : $\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2 - 2\cos\left(\frac{a+2k\pi}{n}\right)X+1\right)$

VI Introduction à la décomposition en éléments simples

Exercice 34 : La décomposition en éléments simples donne : $\frac{X^2+1}{(X-1)(X-2)(X-3)} = \frac{1}{X-1} - \frac{5}{X-2} + \frac{5}{X-3}$.
Solution : $x \mapsto \ln\frac{|x-1||x-3|^5}{|x-2|^5}$.

Exercice 35 : ($\star$) La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$ donne : $\frac{X^5}{X^4-1} = X + \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X+1)} - \frac{1}{4(X-i)} - \frac{1}{4(X+i)}$, puis, dans $\mathbb{R}$: $\frac{X^5}{X^4-1} = X + \frac{1}{4(X-1)} + \frac{1}{4(X+1)} - \frac{X}{2(X^2+1)}$.
Solution : $x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}\ln(\frac{|x^2-1|}{x^2+1})$

Exercice 36 : ($\star$) *Solution :*$\frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k}\binom{n}{k}}{X-k}$

Exercice 37 : ($\star$)

1. *Solution :* $\frac{3X+8}{X(X+2)} = \frac{4}{X} - \frac{1}{X+2}$.
2. Utiliser la décomposition en éléments simples et un changement de variable en $k+2$.
Solution : $S_n = \frac{5}{2} - \frac{3n+5}{(n+1)(n+2)2^n}$
3. *Solution :* $\lim S_n = \frac{5}{2}$.

Exercice 38 : ($\star\star$)

1. Remarquer que $P = (X - x_k)Q$ où $Q = \lambda\prod_{j\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}}(X - x_j)$.
2. La forme de la décomposition en éléments simples est :

$$\frac{1}{P} = \sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{X - x_k}.$$

3. Evaluer en 0.