

I Généralités

Exercice 1 :

Solution : f_1 est linéaire

Utiliser $f_2((1, 0) + (0, 1))$.

Solution : f_2 n'est pas linéaire

Solution : f_3 est linéaire

Solution : f_4 est linéaire

Exercice 2 :

Solution : $((1, 1))$ est une base de $\ker f$ et $((1, -1, 0))$ est une base de $\text{Im } f$.

Exercice 3 : (★)

Pour le noyau, raisonner par coefficients indéterminés. Pour l'image, utiliser l'image d'une base de $\mathbb{R}_3[X]$ qui est une famille génératrice de l'image.

Solution : $(X + 1)$ est une base du noyau, $(1, X^2 + 2X, 2X^3 + 3X^2)$ est une base de l'image.

Exercice 4 : (★)

1. *Solution : $((1, 1, 1))$ est une base de $\ker f_1$ et $((1, -1, 0), (0, -1, 1))$ est une base de $\text{Im } f_1$.*

2. *Solution : $(1 - i)$ est une base de $\ker f_2$ et $(1 + i)$ est une base de $\text{Im } f_2$.*

Exercice 5 : (★)

Montrer que φ est injectif en étudiant son noyau et en calculant la dérivée de g .

Pour l'étude de la surjectivité, remarquer que g est dérivable.

Solution : φ est injectif et n'est pas surjectif.

Exercice 6 : (★)

Raisonner par analyse-synthèse en remarquant que $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) = z(1, 1, 1) + (y - z)(1, 1, 0) + (x - y)(1, 0, 0)$.

Solution : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (y, x - y + z)$,

$\ker(f) = \text{Vect}(1, 0, -1)$, $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$

Exercice 7 :

Solution : 3

Exercice 8 : (★)

Montrer que $\text{Im}(f + g) \subset \text{Im}(f) + \text{Im}(g)$ et en déduire que $\text{rg}(f + g) \leq \text{rg } f + \text{rg } g$.

Appliquer l'inégalité obtenue précédemment à $f + g$ et à $-g$.

II Endomorphismes

Exercice 9 : (★)

- Montrer que $\text{Ker}(f - 2Id_E) \cap \text{Ker}(f - 3Id_E) = \{0_E\}$ sans utiliser l'hypothèse.
- Soit $x \in E$. On cherche à écrire x comme la somme d'un élément de $\text{Ker}(f - 2Id_E)$ et d'un élément de $\text{Ker}(f - 3Id_E)$.

On remarque que $0_E = (f^2 - 5f + 6Id_E)(x) = (f - 3Id_E) \circ (f - 2Id_E)(x)$. En déduire que $f(x) - 2x \in \text{Ker}(f - 3Id_E)$.

De même montrer que : $f(x) - 3x \in \text{Ker}(f - 2Id_E)$.

Ecrire x comme combinaison linéaire de $f(x) - 2x$ et de $f(x) - 3x$ pour conclure.

Exercice 10 : (★★)

Raisonner par double implication. Les inclusions suivantes sont toujours vraies : $\text{Im } f \circ f \subset \text{Im } f$, $\ker f \subset \ker f \circ f$.

Exercice 11 : (★)

Montrer que si $x \in \ker f$, alors $g(x) \in \ker f$ et si $y \in \text{Im } f$, alors $g(y) \in \text{Im } f$

Exercice 12 :

1. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on peut résoudre le système $(x, y, z) = \lambda e_1 + \mu e_2 + \alpha e_3$ d'inconnues λ, μ, α .



2. *Solution : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $p(x, y, z) = \left(x - \frac{z}{3}, y - \frac{2z}{3}, 0\right)$*

3. *Solution : $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $q(x, y, z) = \left(\frac{z}{3}, \frac{2z}{3}, z\right)$*

Exercice 13 : (★★)



1. Montrer d'abord que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $q \circ p = -p \circ q$ puis composer à gauche et à droite cette relation par p .

2. Raisonner par double inclusion.

Exercice 14 : (★)  

1. Montrer que $r \circ r = r$ en utilisant $p \circ p = p$ et $q \circ q = q$.
2.
 - L'inclusion $\text{Ker } p \cap \text{Ker } q \subset \text{Ker } r$ est évidente.
 - Soit $x \in \text{Ker } r$, alors $r(x) = 0_E$. En déduire que $p(x) = q(p(x)) - q(x)$, appliquer p pour avoir : $p(x) = p(p(x)) = \dots = 0_E$.
En déduire, en utilisant $r(x) = 0_E$ que $q(x) = 0_E$ et conclure.
 - Montrer que $\text{Im } p \cap \text{Im } q = \{0_E\}$ en remarquant que si $x \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$ alors $p(x) = x$ et $q(x) = x$ et en utilisant $p \circ q = 0$.
 - Si $x \in \text{Im } p + \text{Im } q$ alors $x = x_1 + x_2$ avec $p(x_1) = x_1$ et $q(x_2) = x_2$, montrer que $p(x_2) = 0_E$ et en déduire que $r(x) = x$ et donc que $x \in \text{Im } r$.
 - Si $x \in \text{Im } r$, remarquer que $x = r(x) = p(x) + q(x - p(x))$ et conclure.

III Applications linéaires en dimension finie

Exercice 15 :  

Montrer que $E = F \oplus G$ pour montrer l'existence et l'unicité. Pour déterminer f , décomposer tout vecteur de E dans $F \oplus G$.

Solution : $f(x, y, z) = (2x - 3y, -y, -z)$

Exercice 16 : (★)

Montrer que l'espace vectoriel recherché est de dimension 3 en utilisant un isomorphisme et chercher des suites de la forme : $u_n = r^n$.

Solution : $((1)_{n \in \mathbb{N}}, ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}, (2^n)_{n \in \mathbb{N}})$

Exercice 17 : (★★)

1. Etudier l'injectivité de φ en utilisant les racines des éléments de son noyau.
2. Utiliser l'image réciproque d'une base par un isomorphisme.
Pour le calcul de L_k , il faut avoir l'intuition de la formule.


$$\text{Solution : } L_k = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$$

3. Evaluer P en a_1, \dots, a_{n+1} .



Solution : $(P(a_1), \dots, P(a_{n+1}))$

Exercice 18 : (★★)

Montrer que l'application $\mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X], P \mapsto \sum_{i=0}^n P^{(i)} \left(\frac{X}{2^i} \right)$ est bien définie, linéaire et bijective.

Exercice 19 : (★) 

Montrer que l'application $C_n[X] \rightarrow C_n[X], P \mapsto P(X - \alpha) + P(X - \beta)$ est bien définie, linéaire et bijective.

Exercice 20 : (★★)  

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
Pour prouver que E_p et F_p sont des sous espaces-vectoriels de $\mathbb{R}[X]$, on peut remarquer que $E_p = E \cap \mathbb{R}_p[X]$ et $F_p = \mathbb{R}_{p-1}[X]$.
Pour prouver que E et F_1 sont supplémentaires dans $\mathbb{R}[X]$, montrer que $E \cap F_1 = \{0\}$ et utiliser la décomposition $P = (P - P(0)) + P(0)$ pour montrer que $P \in E + F_1$.

2. (a) Ecrire P sous la forme $\sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$.

Remarquer que $\deg(\Delta(P)) \leq n$.

Montrer que le coefficient en X^n dans $\Delta(P)$ est nul et que celui en x^{n-1} , pour $n \geq 1$ est non nul.

Solution : $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$ si $\deg(P) \geq 1$ et $\deg(\Delta(P)) = -\infty$ sinon.

- (b) Remarquer que $P \in \ker \Delta$ ssi $\deg(\Delta(P)) = -\infty$ et utiliser la question précédente.

Solution : $\ker \Delta = F_1$

3. On considère l'application $f_p : E_p \rightarrow F_p, P \mapsto \Delta(P)$.

- Montrer que f_p est bien définie.
- En étudiant le noyau, montrer que f_p est injective.
- En utilisant les dimension, en déduire que f_p est bijective.
- Utiliser la surjectivité de f_p pour avoir celle de $\Delta : E \rightarrow \mathbb{R}[X]$.

IV Théorème du rang

Exercice 21 : (★)



Montrer et utiliser : $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im } g$ et $\ker f \subset \ker g \circ f$.

Appliquer le théorème du rang à $g|_{\text{Im } f}$.

Exercice 22 : (★★)

S'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Im } u = \text{Ker } u$ le théorème du rang donne immédiatement la conclusion.

Si n est pair, construire une application u sur une base de E et prouver qu'elle convient.

Exercice 23 : (★★)  

- Si u existe, d'après le théorème du rang : $\dim F + \dim G = n$.

- Si $\dim F + \dim G = n$. Soit (e_1, \dots, e_p) une base de G et (f_1, \dots, f_{n-p}) une base de F .
On complète (e_1, \dots, e_p) en (e_1, \dots, e_n) base de E .
On définit u comme étant l'unique endomorphisme tel que $u(e_k) = 0$ si $k \leq p$ et $u(e_k) = f_{k-p}$ sinon.
En utilisant $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Im } u$, montrer que $\text{Im } u = F$. Remarquer que $G \subset \ker u$ et utiliser les dimensions pour prouver l'égalité.

Solution : $\dim F + \dim G = n$

Exercice 24 : (★★★) ✨

1. Raisonner par l'absurde pour prouver l'injectivité et la surjectivité de f en construisant, pour chaque partie, une fonction g qui ne vérifie pas l'hypothèse.
2. Montrer, en considérant des restrictions, que H est isomorphe à $\mathcal{L}(G, E) \times \mathcal{L}(\text{Im } f, \ker f)$, où G est un supplémentaire de $\text{Im } f$ dans F .

Solution : $\dim H = np - r^2$

V Formes linéaires et hyperplans en dimension finie

Exercice 25 : (★)

1. Utiliser la définition d'une application linéaire.
2. Remarquer qu'il s'agit d'un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Solution : $n^2 - 1$

Exercice 26 : (★) Raisonner par l'absurde.

Exercice 27 : (★★) Considérer un vecteur a tel que $E = H \oplus \text{Vect}(a)$. Raisonner sur les $x \in H$ et sur a .

Exercice 28 : (★★) ✨

Montrer que $H_1 + H_2 + E$ et utiliser la formule de Grassmann.

Solution : $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$