Indications du chapitre 1 : Rudiments de logique et d'arithmétique

I Bases des mathématiques

Exercice 1 : ($\star$)
Remarquer que $2n^2 - n - 6 = (n+3)(2n-7) + 15$.
Solution : $n \in \{0, 2, 12\}$

II Rudiments de logique

Exercice 2 :

1. Exhiber un contre-exemple.
   Solution : Faux
2. Exhiber un contre-exemple.
   Solution : Faux
3. Raisonner par l'absurde.
   Solution : Faux
4. Exhiber une valeur de x et de y qui convient.
   Solution : Vrai
5. Pour y quelconque, exhiber une valeur de x qui convient.
   Solution : Vrai

Exercice 3 : ($\star$)

- On montre que $\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$ est faux.
  Supposons qu'il existe $x \in \mathbb{R}^*$ tel que : $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$.
  En particulier, pour $y = \dots$ et $z = \dots$, on a $x = \dots$.
  Recommencer en choisissant d'autres valeurs de y et z afin d'obtenir deux valeurs de x ce qui donne une contradiction.
- On montre que $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$ est faux.
  Supposons que $\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$.
  Posons $y = \dots$, alors il existe $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$.
  Posons $z = \dots$, on a $x = \dots$.
  Recommencer en choisissant une autre valeur de z afin d'obtenir deux valeurs de x ce qui donne une contradiction.
- On montre que $\forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, z = xy$ est faux.
  Supposons que $\forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, z = xy$.
  Posons $z = \dots$, alors il existe $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $\forall y \in \mathbb{R}^*, z = xy$.
  Posons $y = \dots$, on a $x = \dots$.
  Recommencer en choisissant une autre valeur de y afin d'obtenir deux valeurs de x ce qui donne une contradiction.
- On montre que $\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, z = xy$ est vrai.
  Soit $y \in \mathbb{R}^*$, soit $z \in \mathbb{R}^*$, posons $x = \dots$.
  Vérifier que x convient.

Solution :
$\exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$ *: faux*
$\forall y \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, z = xy$ *: faux*
$\forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, \forall y \in \mathbb{R}^*, z = xy$ *: faux*
$\forall y \in \mathbb{R}^*, \forall z \in \mathbb{R}^*, \exists x \in \mathbb{R}^*, z = xy$ *: vrai*

Exercice 4 : ($\star$)
Remarquer que $a^2 + ab + b^2 = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}b^2$.

Exercice 5 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons que $\sqrt{n^2+1} \in \mathbb{N}$. Posons $m = \sqrt{n^2+1}$.
Calculer $m^2 - n^2$ pour montrer que $(m-n)(m+n) = 1$.
Comme $m - n \in \mathbb{Z}$ et $m + n \in \mathbb{N}$, la seule solution possible est $m - n = m + n = 1$.
Résoudre ces équations, et arriver à la contradiction que m ou n n'est pas entier.

Exercice 6 : ($\star$)
Raisonner par l'absurde et poser une valeur de ε permettant d'obtenir une contradiction.

Exercice 7 : ($\star$)
Raisonner par l'absurde et poser une valeur de ε permettant d'obtenir une contradiction.

Exercice 8 : ($\star$)
Raisonner par l'absurde.

Exercice 9 : ($\star$)
Raisonner par contraposée et utiliser la définition de $\mathbb{Q}$.

Exercice 10 : ($\star\star$)
Raisonner par l'absurde et utiliser que : $\forall j \in [\![1, n]\!], x_j \leq \max(x_1, \dots, x_n)$ et sommer ces inégalités.

Exercice 11 : **($\star\star$)**

1. (a) Faire le cas où n est pair et le cas où n est impair.
   (b) *Solution :* $\exists k \in \mathbb{N},\ n = 8k$
2. (a) *Solution : "si l'entier n est impair alors* $n^2 - 1$ *est pas divisible par 8".*
   (b) Factoriser $n^2 - 1$ et utiliser 1.a
   (c) *Solution : P est vraie*

Exercice 12 : **($\star\star$)**
Raisonner par double implication. Pour $\Rightarrow$, on pourra raisonner par l'absurde.

III Division d'entiers

Exercice 13 :
Raisonner par récurrence.

Exercice 14 :
Raisonner par récurrence en remarquant que $3^{2(n+1)} - 2^{n+1} = (7+2).3^{2n} - 2.2^n$.

Exercice 15 :
Raisonner par récurrence en remarquant que $7^{n+1} - 1 = (6+1).7^n - 1$.

Exercice 16 : **($\star\star$)**

1. Raisonner par récurrence en remarquant que $2^{2^{n+1}} - 6 = ((2^{2^n} - 6) + 6)^2 - 6$.
2. Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 9 | n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$.

Exercice 17 : **($\star$)**
Raisonner par l'absurde et utiliser une combinaison linéaire.

Exercice 18 : **($\star$)**
Ecrire la division euclidienne de a par $a-b$ et celle de b par $a-b$ puis soustraire ces deux expressions.
Solution : On note r_1 *(resp.* r_2*) le reste de la division euclidienne de a (resp. b) par* $a-b$*,* q_1 *(resp.* q_2*) le quotient de la division euclidienne de a (resp. b) par* $a-b$*. On a alors* $r_1 = r_2$ *et* $q_1 = q_2 + 1$.

IV pgcd et ppcm

Exercice 19 :
Raisonner par récurrence à deux niveaux.

Exercice 20 :
Raisonner par récurrence à trois niveaux.

Exercice 21 : **($\star$)**
Montrer par récurrence à deux niveaux que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < u_{n+1}.$$

Exercice 22 : **($\star\star$)**
Raisonner par récurrence à deux niveaux. On pourra remarquer que :

$$x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} = \left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right).$$

Exercice 23 :
n est un diviseur commun de 4365 et 819. Montrer que $\operatorname{pgcd}(4365, 819) = 9$.
Solution : $n = 9$

Exercice 24 :
n est un diviseur commun de 6372 et 3948. Montrer que $\operatorname{pgcd}(6372, 3948) = 12$.
Solution : $n = 12$

Exercice 25 :
Se ramener au calcul de $\operatorname{pgcd}(m, 2m+1)$.
Solution : n

Exercice 26 : **($\star$)**

1. Faire deux cas selon la parité de n.
   Solution : 2 *si n est pair,* 1 *si n est impair.*
2. Factoriser a et b.
   Solution : $2(n+3)$ *si n est pair,* $n+3$ *si n est impair.*

Exercice 27 : **($\star\star$)**
Poser $d = \operatorname{pgcd}(a, b), a = du$ et $b = dv$ puis montrer que $uv = 21$.
Solution : $(a, b) = (d, 21d)$ *ou* $(3d, 7d)$*,* $d \in \mathbb{N}^*$.

V Nombres premiers

Exercice 28 : ($\star$)
Raisonner par récurrence forte.

Exercice 29 : ($\star\star$)
Raisonner par récurrence forte.

Exercice 30 : ($\star\star\star$)
Raisonner par récurrence forte en traitant les cas où $n+1$ est pair et $n+1$ est impair.

Exercice 31 :
Ecrire la décomposition en facteurs premiers de a.

Exercice 32 : ($\star$)
Soit $k \in [\![2,n]\!]$, on veut montrer que $n!+k$ n'est pas premier.
On montre que $k|n!+k$, ainsi, comme $k \neq 1$ et $k \neq n!+k$, $n!+k$ n'est pas premier.
Remarquer, que les nombres $n!+k$, $k \in [\![2,n]\!]$ sont $n-1$ nombres entiers consécutifs non premiers. *Solution : $(n+1)!+k$, avec $k \in [\![2,n+1]\!]$ sont n entiers consécutifs non premiers.*
On écrit la liste des nombres non premiers jusqu'à en obtenir 5 consécutifs. On n'utilise pas la question précédente car le résultat obtenu est trop grand.
Solution : 24,25,26,27,28

Exercice 33 : ($\star\star$)
Ecrire les décomposition en facteurs premiers de a, b et c.

Exercice 34 : ($\star$)

1. Raisonner par l'absurde et utiliser la fomule de factorisation.
2. Remarquer que les diviseurs de $2^{p-1}(2^p-1)$ sont de la forme : $2^{\alpha}(2^p-1)^{\beta}$ avec $\alpha \in [\![0,p-1]\!]$ et $\beta \in \{0,1\}$.

Exercice 35 : ($\star\star$)

1. Les diviseurs de n sont les $p_1^{j_1} p_2^{j_2} \dots p_r^{j_r}$ avec, pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, $j_k \in [\![0,\alpha_k]\!]$.
   On conclut en calculant le nombre de possibilités.
   Solution : $\displaystyle\prod_{k=1}^{r}(\alpha_k+1)$
2. Montrons pas récurrence que sur r que : $S(n) = \displaystyle\prod_{k=1}^{r} \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$.
   - Pour $r=1$, on a $n = p_1^{\alpha_1}, \dots$
   - Soit $r \in \mathbb{N}^*$, supposons le résultat au rang r.
     Soit $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} p_{r+1}^{\alpha_{r+1}}$. Les diviseurs de n sont de la forme : $m.p_{r+1}^{j}$ où m est un diviseurs de $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}$ et $j \in [\![0,\alpha_{r+1}]\!]$. Ainsi $S(n) = S(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r}) \sum_{j=0}^{\alpha_{r+1}} p_{r+1}^{j}$.
     Conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence et la formule de somme des suites géométriques.

   Solution : $\displaystyle\prod_{k=1}^{r} \frac{p_k^{\alpha_k+1}-1}{p_k-1}$
3. Décomposer m et n en produit de facteurs premiers et utiliser le résultat précédent.

VI Raisonnement par analyse-synthèse

Exercice 36 : ($\star$)
Raisonner par analyse-synthèse. On cherchera d'abord la valeur de g pour en déduire celle de h.
Solution : $g : x \mapsto f(0)$ et $h : x \mapsto f(x) - f(0)$

Exercice 37 : ($\star\star$)
Raisonner par analyse-synthèse. On cherchera d'abord la valeur de g en intégrant la relation $f = g+h$, pour en déduire celle de h.
Solution : $g : x \mapsto 2x.\displaystyle\int_0^1 f$ et $h : x \mapsto f(x) - 2x.\displaystyle\int_0^1 f$

Exercice 38 : ($\star\star$)
<u>Analyse :</u>
Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que : $\forall g \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $f \circ g = g \circ f$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. En posant g la fonction constante égale à x, montrer que $f(x) = x$.
<u>Synthèse :</u>
Posons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$. Montrer que f convient, c'est à dire que pour toute fonction g (et pas seulement pour g constante), $f \circ g = g \circ f$.
Solution : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$.

Exercice 39 : ($\star\star$)
Raisonner par analyse-synthèse. Pour l'analyse : choisir des valeurs particulières de x dans la relation : $f(x) = ax+b$. Pour la synthèse, choisir des valeurs particulières de x, y et z dans la relation $\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{f(x)-f(z)}{x-z}$.