Indications du chapitre 20 : Probabilités sur un univers fini, variables aléatoires et lois

I Univers, événements, variables aléatoires

II Espaces probabilisés finis

Exercice 1 :
Le nombre d'évenements tels que toutes les faces donnent un chiffre différent est le même que le nombre de bijection de $[\![1,6]\!]$ dans lui même.
Solution : $\dfrac{5}{324}$

Exercice 2 : ($\star$)

1. (a) *Solution :* $P(A) = \dfrac{9}{91}$
   (b) *Solution :* $P(B) = \dfrac{81}{455}$
   (c) *Solution :* $P(C) = \dfrac{94}{455}$
2. (a) *Solution :* $P(A) = \dfrac{2}{25}$
   (b) *Solution :* $P(B) = \dfrac{19}{125}$
   (c) *Solution :* $P(C) = \dfrac{19}{75}$

Exercice 3 :
Considérer les événements : A :"les deux boules tirées sont paires" et B :"les deux boules tirées sont impaires".

1. *Solution :* $\dfrac{4}{9}$
2. *Solution :* $\dfrac{4}{9}$
3. *Solution :* $\dfrac{41}{81}$

Exercice 4 :
Remarquer que $C = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
Solution : $P(C) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$.

Exercice 5 : ($\star\star$)

1. Considérer les événements : A_i " la boule du $r^{\text{ième}}$ tirage est la boule numéro i" et calculer $P(E_r \cap A_i)$.
   Solution : $\dfrac{1}{n^r} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^{r-1}$.
2. *Solution :* $\dfrac{n+1}{2n}$
3. Reconnaître une somme de Riemann.
   Solution : $\dfrac{1}{r}$

Exercice 6 : ($\star$)

1. Il s'agit d'un tirage successif avec remise, donc $\mathrm{Card}(\Omega) = \dots$.
   On cherche le nombre de tirages de n éléments distincts avec ordre, il y a donc ... possibilités.
   Conclure.
   Solution : $\dfrac{M!}{(M-n)!M^n}$
2. L'événement contraire est les élèves ont tous leurs anniversaires à des jours différents ce qui équivaut à un tirage de n jetons distincts dans une urne contenant 365 jetons.
   Solution : $1 - \dfrac{365!}{(365-n)!365^n}$

Exercice 7 : ($\star\star$)

1. (a) Choisir les $p-1$ premières boules parmi les boules ayant un numéro inférieur ou égal à $k-1$.
   Solution : $\dfrac{\binom{k-1}{p-1}}{\binom{n}{p}}$
   (b) Remarquer que la famille (A_k) forme un système complet d'événements.
2. Considérer l'événement C_k : "le maximum des boules tirées est k" et calculer $P(B \cap C_k)$ où B : "la $p^{\text{ième}}$ boule tirée a un numéro supérieur aux $p-1$ numéros précédents".
   Solution : $\dfrac{1}{p}$

III Probabilités conditionnelles

Exercice 8 : ($\star$) Utiliser la formule des probabilités composées.
Solution : $\dfrac{1}{5}$

Exercice 9 : ($\star\star$)
Utiliser la formule des probabilités composées.

1. *Solution :* $\dfrac{2^{k-1}}{3^k}$
2. *Solution :* $\dfrac{1}{3\times 2^{k-2}}$
3. *Solution :* $\dfrac{1}{3}$ *si* $k\in\{1,2,3\}$ *et 0 sinon.*

Exercice 10 : ($\star$)

1. Remarquer que J_1 gagne au n-ième coup ssi la somme des dés aux coups précédents était diférente de 6 et 7 et la somme des dés au n-ième coup est 6 et utiliser la formule des probabilités composées.
   Solution : $\left(\dfrac{25}{36}\right)^{n-1}\dfrac{5}{36}$
2. p_n est la somme des probabilités des événements "J_1 gagne au k-ième coup" pour k allant de 1 à n.
   Solution : $\left(1-\left(\dfrac{25}{36}\right)^n\right)\dfrac{5}{11}$
3. q_n est la somme des probabilités des événements "J_2 gagne au k-ième coup" pour k allant de 1 à n.
   Solution : $\left(1-\left(\dfrac{25}{36}\right)^n\right)\dfrac{6}{11}$
4. *Solution :* $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n=\dfrac{5}{11}$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} q_n=\dfrac{6}{11}$.

Exercice 11 :

1. Appliquer la formule des probabilité totales avec les événement A_i : "la pièce provient de la machine M_i".
   Solution : $\dfrac{29}{1000}$
2. Utiliser une intersection.
   Solution : $\dfrac{1}{100}$
3. Utiliser la définition des probabilités conditionnelles.
   Solution : $\dfrac{10}{29}$

Exercice 12 : ($\star$)

1. *Solution :* $a_n+b_n+c_n=1$
2. Appliquer la formule des probabilité totales avec les événement A_n, B_n et C_n.
   Solution : $a_{n+1}=\frac{2}{3}a_n+\frac{1}{6}b_n+\frac{1}{6}c_n$, $b_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{2}{3}b_n+\frac{1}{6}c_n$, $c_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{6}b_n+\frac{2}{3}c_n$
3. Soustraire les relations précédentes.
4. Utiliser les questions 1 et 3.
   Solution : $a_n=\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$, $b_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$, $c_n=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

Exercice 13 : ($\star$)

1. Utiliser la formule des probabilités totales et reconnaître une suite arithmético-géométrique.
   Solution : $p_n=\frac{1-b}{2-a-b}+\frac{1-a}{2-a-b}(a+b-1)^n$
2. *Solution :* $\frac{1-b}{2-a-b}$

Exercice 14 :
On considère les événements : A_j : "on obtient j piles à la première étape" et B_j : "le gain est j".

1. Remarquer que $B_0=A_0\cup(A_1\cap B_0)\cup(A_2\cap B_0)$ et utiliser des probabiltés conditionnelles.
   Solution : $\dfrac{25}{64}$
2. Appliquer la formule de Bayes au système complet (A_0,A_1,A_2).
   Solution : $\dfrac{1}{5}$

Exercice 15 : ($\star\star$)
On peut considérer que la porte choisie par le candidat à le numéro 1. Utiliser la formule de Bayes pour calculer la probabilité que la voiture soit derrière la porte 3 sachant que le présentateur a ouvert la porte 2.
Solution : Le candidat doit changer son choix.

IV Loi d'une variable aléatoire

Exercice 16 : ($\star$)
L'évenement $(X=k)$ corrspond aux tirages de la forme : $(0,\dots,0,1,x_{k+1},\dots,x_N)$.
On peut poser $X=N+1$ lorsque les N tirages ne donnent que des faces.
Solution : $P(X=k)=\frac{1}{2^k}$ *pour* $k\in[\![1,N]\!]$, $P(X=N+1)=\frac{1}{2^N}$

Exercice 17 :
Calculer $P(X=k)$ pour $k\in[\![1,n]\!]$.

Exercice 18 : (★★)

1. *Solution :* $X_i \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$
2. Calculer $P(Y=1)$, puis $P(Y=2)$ en remarquant que : $P(X_3=0) = P(X_1=n) + P(X_2=n) + P((X_1 \neq n) \cap (X_2 \neq n) \cap (X_3=0))$, puis $P(Y=3)$.
   Solution : $P(Y=1) = \frac{1}{3^{n-1}}$, $P(Y=2) = 3\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$, $P(Y=3) = 1 + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

Exercice 19 :
On tire une carte au hasard d'un jeu de 32 cartes. On considère les trois variables aléatoires suivantes :

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si on tire un roi} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si on tire une dame} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 1 & \text{si on tire un coeur} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Solution :

X \ Y	0	1
0	3/4	1/8
1	1/8	0

,

X \ Z	0	1
0	21/32	7/32
1	3/32	1/32

,
$X \sim \mathcal{B}(\frac{1}{8})$, $Y \sim \mathcal{B}(\frac{1}{8})$, $Z \sim \mathcal{B}(\frac{1}{4})$.

V Evénements indépendants

Exercice 20 : (★★)

1. On note u_k : "L'urne contient k boules noires". Utiliser la formule des probabilités totales au système complet d'événements : (U_0, U_1, U_2, U_3).
   Solution : $P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}$, $P(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{3}$, *les événements ne sont pas deux à deux indépendants.*
2. Utiliser la formule des probabilités totales au système complet d'événements : (U_0, U_1, U_2, U_3).
   Solution : $P(B^n) = \frac{3^{n-1} + 2n^n + 1}{8 \times 3^{n-1}}$
3. Utiliser la formule de Bayes.
   Solution : $P(U_0 | B^3) = \frac{1}{2}$
4. *Solution :* $P(B_4 | B^3) = \frac{22}{27}$

Exercice 21 : (★★)

1. On note A_k : "la première génération compte k individus". Utiliser la formule des probabilités totales au système complet : (A_0, A_1, A_2, A_3).
   Solution : $\dfrac{729}{4096}$
2. Partir de la 1ére génération et regarder la probabilité pour qu'elle s'éteigne en n générations.
3. Utiliser la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{8}(1+x)^3$ et montrer que $[0, -2+\sqrt{5}]$ est stable par f.

Exercice 22 : (★★)
On note :

A_k :"le joueur A gagne à la partie k"
B_k :"le joueur B gagne à la partie k"
U_k :"le dé donne 1 ou 2 à la partie k"
V_k :"le dé donne 3,4 ou 5 à la partie k"

1. Remarquer que $P(A_{2k}) = 0$.
   Remarquer que $P(A_{2k+1}) = P(\overline{U_1} \cap \overline{V_2} \cap \cdots \cap \overline{U_{2k-1}} \cap \overline{V_{2k}} \cap U_{2k+1})$, et que $P(\overline{U_{2j+1}}) = \frac{2}{3}$, $P(\overline{V_{2j}}) = \frac{1}{2}$ et utiliser l'indépendance mutuelle de ces événements.
   Raisonner de même pour $P(B_k)$.
   Solution : $P(A_{2k}) = 0, P(A_{2k+1}) = \dfrac{1}{3^{k+1}}, P(B_{2k+1}) = 0, P(B_{2k}) = \dfrac{1}{3^k}$
2. La probabilité que A gagne en moins de n parties est $P(\cup_{k=0}^n A_k) = \cdots \displaystyle\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} P(A_{2j+1})$ et se ramener à une somme géométrique.
   Solution : $\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 1}}\right)$ *pour A et* $\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{3^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}\right)$ *pour B*

VI Variables aléatoires indépendantes

Exercice 23 :

1. *Solution :* $P(X=1, Y=1) = \frac{4}{9}$, $P(X=1, Y=-1) = \frac{2}{9}$, $P(X=-1, Y=1) = \frac{1}{9}$, $P(X=-1, Y=-1) = \frac{2}{9}$, *X et Y ne sont pas indépendantes.*
2. *Solution :* X^2 *et* Y^2 *sont indépendantes.*

Exercice 24 : (★)
Calculer $P(U \leq k)$ et $P(V \geq k)$.
Solution : $P(U=k) = \frac{2k-1}{n^2}$, $P(V=k) = \frac{2(n-k)+1}{n^2}$

Exercice 25 : (★★)
Remarquer que, pour $k \in [\![0, 2n]\!]$: $P(S=k) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} P(S=k | X=j) P(X=j) = \cdots =$

$$\sum_{i=\max(0,k-n)}^{\min(n,k)} P(X=i)P(Y=k-i).$$

Calculer cette somme.

Solution : $P(S=k)=\frac{k+1}{(n+1)^2}$ *si* $0\le k\le n$, $P(S=k)=\frac{2n-k+1}{(n+1)^2}$ *si* $k>n$

Exercice 26 : **(★★)**

Introduire l'événement : $A_{k,i}$ "le numéro k est sorti au tirage i" et remarquer que $(X_i=1)=\cup_{k=0}^{N}\overline{A_{k,1}}\cap\ldots\overline{A_{k,i-1}}\cap A_{k,i}$. *Solution :* $P(X_i=1)=\left(\frac{N}{N+1}\right)^{i-1}$ *et les variables aléatoires* X_i *et* X_j *ne sont pas indépendantes pour* $i\neq j$.