Indications du chapitre 21 : Espérance et variance

I Espérance

Exercice 1 :

1. Calculer $P(X_i = 1)$.
   Solution : $X_i \sim \mathcal{B}(p)$, $E(X_i) = p$ *avec :* $p = \dfrac{r(2r-1)}{n(2n-1)}$.
2. Remarquer que $X = X_1 + \cdots + X_n$.
   Solution : $E(X) = \dfrac{r(2r-1)}{(2n-1)}$.

Exercice 2 : ($\star$)
Montrer que $P(U = k) = \frac{2k-1}{n^2}$, pour calculer $E(V)$, remarquer que $U + V = X + Y$.
Solution : $E(U) = \dfrac{(n+1)(4n-1)}{6n}$, $E(V) = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n}$.

Exercice 3 : ($\star\star$)

1. *Solution :* $P(X_1 = 2) = P(X_1 = 4) = \frac{1}{2}$, $P(X_2 = 1) = P(X_2 = 5) = \frac{1}{6}$, $P(X_2 = 3) = \frac{2}{3}$.
2. Utiliser la formule des probabilités totales.
   Solution : $P(X_{n+1} = k) = \frac{7-k}{6}P(X_n = k-1) + \frac{k+1}{6}P(X_n = k+1)$
3. Utiliser la formule de transfert.
   Solution : $E(X_{n+1}) = 1 + \frac{2}{3}E(X_n)$ *et* $E(X_n) = 3$.

Exercice 4 : ($\star\star$)
Introduire la variable aléatoire U_k qui vaut 1 si la puce effectue un saut vers la droite à l'instant k et 0 sinon. Alors $U_k \sim \mathcal{B}(p)$ et remarquer que $X_n = 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k - n$.
Solution : $P(X_n = 2k - n) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$, $E(X_n) = n(2p-1)$.

II Variance, écart type et covariance

Exercice 5 :
Calculer la loi de X, puis $E(X)$ et $E(X^2)$.
Solution : $V(X) = \frac{14}{25}$.

Exercice 6 : ($\star\star$)

1. Calculer $P(X_2 = 0)$, $P(X_2 = 1)$, $P(X_3 = 0)$, $P(X_3 = 1)$, $P(X_3 = 2)$.
   Solution : $X_2 \sim \mathcal{B}(\frac{1}{2})$, $E(X_2) = \frac{1}{2}$, $V(X_2) = \frac{1}{4}$
   $P(X_3 = 0) = \frac{1}{4}$, $P(X_3 = 1) = \frac{1}{2}$, $P(X_3 = 2) = \frac{1}{4}$, $E(X_3) = 1$, $V(X_3) = \frac{1}{2}$.
2. *Solution :* X_n *est à valeurs dans* $[\![0, n-1]\!]$, $P(X_n = 0) = \frac{1}{2^{n-1}}$, $P(X_n = n-1) = \frac{1}{2^{n-1}}$
3. Utiliser la formule des probabilités totales appliquée à "les côtes obtenus aux lancers n et $n+1$ sont égaux" et à son contraire.
4. (a) Remarquer que $E(X_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} kP(X_n = k)$ et $E(X_n^2) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} k^2 P(X_n = k)$. *Solution :* $Q_n(1) = 1$, $V(X_n) = Q_n''(1) + Q_n'(1) - (Q_n'(1))^2$.
   (b) Utiliser le résultat de la question 3.
   (c) Remarquer que $(Q_n(s))$ est géométrique et calculer $Q_2(s)$.
   Solution : $Q_n(s) = \left(\frac{1+s}{2}\right)^{n-1}$
   (d) Utiliser 4.a.
   Solution : $E(X_n) = \frac{n-1}{2}$, $V(X_n) = \frac{n-1}{4}$.

Exercice 7 : ($\star\star$)

1. Remarquer que $P(Y \leq k) = \dfrac{\begin{pmatrix} k \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}}$ et que $P(Y = k) = P(Y \leq k) - P(Y \leq k-1)$.
   Solution : $P(Y = k) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$ *pour* $k \geq 2$.
2. On a $E(Y) = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \dfrac{2k(k-1)}{n(n-1)}$. On utilisera les valeurs de $\sum_{k=1}^{n} k$ et de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.
   On raisonne de même pour la variance.
   Solution : $E(Y) = \frac{2(n+1)}{3}$, $V(Y) = \frac{(n-2)(n+1)}{18}$
3. Remarquer que $P(X \geq k) = \dfrac{\begin{pmatrix} n-k+1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} n \\ 2 \end{pmatrix}}$ et que $P(X = k) = P(X \geq k) - P(X \geq k+1)$.
   Solution : $P(X = k) = \frac{2(n-k)}{n(n-1)}$ *pour* $k \leq n-1$.
4. Montrer que $P(Y = k) = P(n+1-X = k)$.
   Comme Y et $n+1-X$ ont mêmes lois, on a $E(Y) = E(n+1-X) = n+1-E(X)$ et

$V(Y) = V(n+1-X) = V(X)$.
Solution : $E(X) = \frac{n+1}{3}$, $V(X) = \frac{(n-2)(n+1)}{18}$

Exercice 8 : (⋆⋆)

1. Sommer les valeurs données.
   Solution : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ *et* $P(Y=k) = \frac{(1-p)^n}{n} + \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$
2. Reconnaître l'espérance d'une loi binomiale.
   Solution : $E(Y) = \frac{(1-p)^n(n+1)}{2} + np$
3. Calculer, par exemple, $P(X=1).P(Y=2)$.
   Solution : X et Y ne sont pas indépendantes.
4. Utiliser la définition de la loi conditionnelle.
   Solution : sachant $X = j \neq 0$, $Y \sim j$, *et sachant* $X = j = 0$, $Y \sim \mathcal{U}([\![1,n]\!])$.
5. Utiliser la formule du transfert et se ramener à la variance d'une loi binomiale.
   Solution : $cov(X,Y) = np(1-p)\left(1 - \frac{n+1}{2}(1-p)^{n-1}\right)$ *et X et Y sont décorrélées ssi* $p = 1 - \left(\frac{2}{n+1}\right)^{1/(n-1)}$.

III Inégalités probabilistes

Exercice 9 : (⋆)

1. *Solution :* $X \sim \mathcal{B}(100, \frac{5}{100})$, $Y \sim \mathcal{B}(400, \frac{1}{10})$
2. Comme X et Y sont indépendantes, $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$.
   Solution : $E(Z) = 45$, $V(Z) = \frac{163}{4}$.
3. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
   Solution : $c \geq 74$

Exercice 10 : (⋆⋆)

1. *Solution :* $E(X) = 2n$ *et* $V(X = n)$.
2. *Solution :* $P(X \geq 3n) \leq \frac{2}{3}$.
3. Remarquer que $(|X - 2n| \geq n) = (X \geq 3n) \cup (X \leq n)$ et que $P(X \geq 3n) = P(X \leq n)$.
   Solution : $P(X \geq 3n) \leq \frac{1}{2n}$.
4. Calculer $E(Y)$ en utilisant la formule de transfert.
   Solution : $P(X \geq 3n) \leq \frac{1}{2^{3n}}\left(\frac{3}{2}\right)^{4n}$.
5. *Solution : La question 4. donne le meilleur résultat et la 2. le moins bon.*

Exercice 11 : (⋆⋆)

1. Remarquer que $P(X - E(X) \geq a) \leq P((X - E(X) + t)^2 \geq (a+t)^2)$ et appliquer l'inégalité de Markov.
2. Etudier le minimum de $t \mapsto \frac{t^2 + V(X)}{(t+a)^2}$.
3. Remarquer que $P(|X - E(X)| \geq a) = P(X - E(X) \geq a) + P(X - E(X) \leq -a)$ et appliquer l'inégalité précédente à $-X$.