Indications du chapitre 2 : Compléments de calcul algébrique et de trigonométrie

I Sommes

Exercice 1 :

1. *Solution :* 48
2. *Solution :* $(n+1)(n+3)$
3. *Solution :* $4n(n+1)$
4. *Solution :* $2n(n+2)$
5. Remarquer que $S_5 = \sum_{k=0}^{2n} x_k - \sum_{k=0}^{n} x_k$.
   Solution : $n(3n+2)$

Exercice 2 : ($\star$)
Rassembler les termes pairs et les termes impairs.
Solution : $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k = n$.

Exercice 3 : ($\star$)
Remarquer que $\sum_{n=1}^{N+1} n^4 = \sum_{n=0}^{N} (n+1)^4$.
Solution : $\dfrac{N^2(N+1)^2}{4}$

Exercice 4 :
Utiliser les formules donnant la somme d'une suite géométrique, la somme de 1 et la somme des n premiers entiers.
Solution : $8.2^n - \frac{7n}{2} - 7 - \frac{n^2}{2}$

Exercice 5 : ($\star\star$)

1. Utiliser le résultat sur les sommes télescopiques.
   Solution : $1 - \dfrac{1}{n+1}$
2. Remarquer que, pour $p \in \mathbb{N}$, $2p+1 = (p+1)^2 - p^2$ et utiliser le résultat sur les sommes télescopiques.
   Solution : $1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$

Exercice 6 : ($\star$)

1. Multiplier et diviser le membre de gauche par : $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.
2. Montrer, en sommant les inégalités précédentes, que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n \geq 2(\sqrt{n+1} - 1)$ et passer à la limite.
   Solution : $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *diverge.*

II Produits

Exercice 7 :
Remarquer que : $\prod_{k=0}^{n} 2^k = 2^{\sum_{k=0}^{n} k}$.
Solution : $2^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

Exercice 8 : ($\star$)

1. <u>Méthode 1 :</u> Par récurrence :
   - Pour $n = 1, \ldots$
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $(n+1)! \geq \sum_{k=1}^{n} k!$, alors :
   $$\sum_{k=1}^{n+1} k! = \sum_{k=1}^{n} k! + (n+1)! \leq 2(n+1)!$$
   Il ne reste plus qu'à montrer que $2(n+1)! \leq (n+2)!$.

   <u>Méthode 2 :</u> On a :
   $$\sum_{k=1}^{n} k! \leq \sum_{k=1}^{n} n! = n! \sum_{k=1}^{n} 1 \leq n.n!$$
   Il ne reste plus qu'à montrer que $n.n! \leq (n+1)!$.
2. <u>Méthode 1 :</u> Par récurrence :
   - Pour $n = 1, \ldots$
   - Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\sum_{k=1}^{n} k.k! = (n+1)! - 1$, alors :
   $$\sum_{k=1}^{n+1} k.k! = \sum_{k=1}^{n} k.k! + (n+1).(n+1)!$$
   Utiliser l'hypothèse de récurrence et simplifier le résultat obtenu.

Méthode 2 : On a :

$$\sum_{k=1}^{n} k.k! = \sum_{k=1}^{n} (k+1-1).k! = \sum_{k=1}^{n} ((k+1)!-k!)\,.$$

Utiliser ensuite le résultat sur les sommes télescopiques.

Exercice 9 : ($\star$)
Par récurrence en montrant que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $n^n \leq (n+1)^n$.

Exercice 10 : ($\star\star$)

1. Faire une étude de fonction.
2. Raisonner par récurrence.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in [\![1,n]\!]$. Appliquer l'inégalité précédente à $x = \frac{u_k}{A_n}$ puis sommer les inégalités obtenues.
4. Etudier le cas d'égalité dans les inégalités précédentes.
   Solution : $u_1 = \cdots = u_n$.

Exercice 11 : ($\star\star$)
On a :

$$\prod_{p=1}^{n} \frac{(2p+1)(2p-1)}{(2p+3)(2p+5)} = \frac{\prod_{p=1}^{n}(2p+1)\prod_{p=1}^{n}(2p-1)}{\prod_{p=1}^{n}(2p+3)\prod_{p=1}^{n}(2p+5)}.$$

On effectue les changements de variables suivants :

- $j = p-1$ dans $\prod_{p=1}^{n}(2p-1)$,
- $k = p+1$ dans $\prod_{p=1}^{n}(2p+3)$,
- $l = p+2$ dans $\prod_{p=1}^{n}(2p+5)$. On obtient une expression de la forme :

$$\frac{\prod_{p=1}^{n}(2p+1)\prod_{j=\ldots}^{\ldots}(2j+1)}{\prod_{k=\ldots}^{\ldots}(2k+1)\prod_{l=\ldots}^{\ldots}(2l+1)}.$$

Ces termes étant identiques, on simplifie les termes communs.
Solution : $\dfrac{45}{(2n+1)(2n+3)^2(2n+5)}$

Exercice 12 : ($\star\star$)
On raisonne par récurrence.

- Pour $n = 1, \ldots$
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \leq 2^{n-1}(1+\prod_{i=1}^{n} a_i)$.
  On a :
  $$\prod_{i=1}^{n+1}(1+a_i) = \prod_{i=1}^{n}(1+a_i)(1+a_{n+1}) \leq 2^{n-1}(1+\prod_{i=1}^{n} a_i)(1+a_{n+1}).$$
  Or :
  $$(1+\prod_{i=1}^{n} a_i)(1+a_{n+1}) = 1+\prod_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} + \prod_{i=1}^{n+1} a_i.$$
  Il reste donc à prouver que : $\prod_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} \leq 1 + \prod_{i=1}^{n+1} a_i$.
  En étudiant $(x-1)(y-1)$, montrer que : $\forall x, y \in [1,+\infty[$, $x+y \leq 1+xy$.
  Appliquer cette inégalité à x et y bien choisis.

III Sommes doubles

Exercice 13 :
Solution : $\dfrac{-2^{n+2}+2^{-n}+8.4^n-2}{3}$

Exercice 14 :
Intervertir les deux sommes.
Solution : $\sum_{k=1}^{n} k2^k = (n-1)2^{n+1}+2$.

Exercice 15 : ($\star\star$)

Remarquer que $\sum_{i,j\in[\![1,n]\!]} \max(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} j$.
Solution : $\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

IV Coefficients binomiaux et formule du binôme de Newton

Exercice 16 : ($\star$)
Ecrire les coefficients binomiaux avec des factorielles et montrer que la première équation

équivaut à $n-2p=1$ et que la seconde équivaut à $4n-9p=-4$ puis résoudre ce système.
Solution : $(n,p)=(17,8)$

Exercice 17 :
Ecrire les coefficients binômiaux avec des factorielles.
Solution : $\frac{n(n+1)}{2}$

Exercice 18 : ($\star\star$)
Raisonner par récurrence forte.

Exercice 19 : ($\star$)
Raisonner par récurrence.

Exercice 20 :
Intégrer, entre 0 et 1, $x \longmapsto (1+x)^n$.
Solution : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

Exercice 21 :
Intervertir les sommes et utiliser la formule du binôme de Newton.
Solution : 3^n

Exercice 22 : ($\star\star$)
Calculer, en utilisant la formule du binôme de Newton : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{2k}+\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{2k+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{2k}-\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{2k+1}$.
Solution : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{2k}=\sum_{k=0}^{p-1}\binom{n}{2k+1}=2^{n-1}$.

Exercice 23 : ($\star\star\star$)
Par récurrence en montrant, en utilisant le binôme de Newton, que, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $4\leq\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{3n+3}$.

V Systèmes linéaires

Exercice 24 :
Solution : $\{(-8+11z, 5-7z, z),\ z\in\mathbb{R}\}$

Exercice 25 :
Solution : $\{(2-a, -5+3a+z, z),\ z\in\mathbb{R}\}$ *si* $a+b=3$, $\emptyset$ *sinon.*

Exercice 26 :
Solution : $\left\{(-\frac{m-1}{m}y+\frac{m+2}{m}, y),\ y\in\mathbb{R}\right\}$ *si* $m=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\{(3,-2)\}$ *sinon.*

Exercice 27 : ($\star$)
Solution : $\{\left(-\frac{2}{m-1}, \frac{3m}{m-1}, -\frac{1}{m-1}\right)\}$ *si* $m\neq 1$ *et* $m\neq-\frac{3}{2}$
$\{(2z, 1+2z, z),\ z\in\mathbb{R}\}$ *si* $m=-\frac{3}{2}$
$\emptyset$ *si* $m=1$.

Exercice 28 : ($\star$)
Solution : $\{\left(m, 1, \frac{1}{m}\right)\}$ *si* $m\notin\{0,1,-1\}$
$\{(1, z, z),\ z\in\mathbb{R}\}$ *si* $m=1$
$\{(-1, -z, z),\ z\in\mathbb{R}\}$ *si* $m=-1$
$\emptyset$ *si* $m=0$.

VI Cercle trigonométrique

Exercice 29 : ($\star$)
Utiliser les formules $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$.
Solution : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

Exercice 30 : ($\star$)
Remarquer que $\cos x+\sqrt{3}\sin x = 2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 31 : ($\star\star$)
Raisonner par récurrence.

VII Équations et inéquations trigonométriques

Exercice 32 :
Se ramener à un produit nul.
Solution : $\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice 33 : ($\star$)
Poser $X=\cos(2x)$ et se ramener à un polynôme du second degré.
Solution : $\{k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\pm\frac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice 34 : (⋆)
Transformer le sinus en cosinus.
Solution : $\{\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice 35 : (⋆⋆)
Se ramener à un produit nul.
Solution : $\{\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{-\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\frac{2k\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}\}$

Exercice 36 :

1. *Solution :* $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[$
2. *Solution :* $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[-\frac{7\pi}{6}+2k\pi, \frac{\pi}{6}+2k\pi\right]$

VIII Fonctions cosinus et sinus

Exercice 37 :
Solution : $f'(x)=-6\cos(x)\sin^2(x)$, f est croissante sur $[-\pi,-\frac{\pi}{2}]$ et sur $[\frac{\pi}{2},\pi]$ et décroissante sur $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$.

Exercice 38 : (⋆) Pour étudier le signe de la dérivée, se ramener au signe d'un polynôme du second degré.
Solution : $f'(x)4\cos^2(x)+2\cos(x)-2$, f est 2π-périodique, impaire, croissante sur $[0,\frac{\pi}{3}]$ et décroissante sur $[\frac{\pi}{3},\pi]$.

Exercice 39 : (⋆⋆) *Solution : $f'(x)=2\sin x\left(\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, f est croissante sur $[0,\frac{3\pi}{4}]$ et décroissante sur $[\frac{3\pi}{4},\pi]$.*

Exercice 40 : (⋆⋆)

1. *Solution : $g_n(x)=\cos(x)-n\sin(x)$.*
2. *Solution : g_n est décroissante.*
3. Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer que g_n s'annule.

IX Tangente

Exercice 41 : (⋆)

1. *Solution :* $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{4}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\}$
2. *Solution : f est π-périodique.*
3. Utiliser $f(0)$ pour montrer que f n'est pas impaire. Raisonner par l'absurde pour montrer que f n'est pas paire en utilisant, par exemple, les valeurs en $\pm\frac{\pi}{6}$.
Solution : f n'est ni paire ni impaire.
4. Utiliser les formules de trigonométrie.
5. *Solution : f est strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}[$ et sur $]\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}[$.*

Exercice 42 : (⋆⋆)

1. *Solution :* $\mathbb{R}\setminus\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$
2. *Solution : f est π-périodique.*
3. *Solution : f est impaire.*
4. Pour étudier le signe de la dérivée, se ramener au signe d'un polynôme du second degré en $\cos^2 x$.
Solution : $f'(x)=\dfrac{4\cos^4 x-2\cos^2 x-\frac{3}{4}}{\cos^2 x}$, f est strictement croissante sur $\left[0,\frac{\pi}{6}\right[$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 43 : (⋆ ⋆ ⋆) *Solution : $f'(x)=\frac{\tan(x)(4+\cos x+\cos^2 x)\sqrt{1-\cos x}}{2\cos^2 x}$, f est croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et décroissante sur $]\frac{\pi}{2},\pi]$.*