Indications du chapitre 3 : Inégalités et fonctions d'une variable réelle

I Inégalités dans $\mathbb{R}$

Exercice 1 : ($\star$)
Simplifier $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2$.

Exercice 2 :
Etudier le domaine de définition de l'inéquation, mettre une racine carrée dans chaque membre puis élever au carré.
Solution : L'ensemble des solutions est $[4, +\infty[$.

Exercice 3 : ($\star$)

1. Utiliser $|a| = |b| \Longleftrightarrow a = \pm b$.
   Solution : L'ensemble des solutions est $\{3, \frac{5}{3}\}$.
2. Utiliser $|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$ et faire un tableau de signe.
   Solution : L'ensemble des solutions est $]-\infty, -7] \cup [-\frac{5}{3}, +\infty[$.

Exercice 4 : ($\star$)
Raisonner par disjonction de cas.
Solution : $\left\{-\frac{3}{4}, \frac{3}{2}\right\}$

Exercice 5 : ($\star\star$)
Faire apparaître des identités remarquables et des valeurs absolues.
Solution : $[4, 9]$

Exercice 6 : ($\star$)
Elever au carré l'inégalité à prouver.

Exercice 7 : ($\star\star$)

1. Elever au carré les quantités à comparer.
2. Utiliser l'inégalité triangulaire et la première question.

Exercice 8 : ($\star\star$)
Remarquer que $x = \dfrac{(x+y)+(x-y)}{2}$ et $y = \dfrac{(x+y)-(x-y)}{2}$.
Remarquer que $xy - 1 = (1-x)(1-y) + (x-1) + (y-1)$.

Exercice 9 :
Utiliser l'inégalité triangulaire, remarquer que : $\forall k \in \mathbb{N}^* \ \forall x \in \mathbb{R}, \left|\dfrac{(-1)^n \sin(nx)}{n+k^2}\right| \leq \dfrac{1}{n}$.

Exercice 10 : ($\star\star$)
Utiliser l'inégalité triangulaire, remarquer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, 0 \leq \sin\dfrac{\pi}{6k} \leq \dfrac{1}{2}$ et utiliser la somme d'une progression géométrique.

Exercice 11 : L'équation est équivalente à $2 \leq \sqrt{x^2+1} < 3$.
Solution : $]-2\sqrt{2}, -\sqrt{3}] \cup [\sqrt{3}, 2\sqrt{2}[$

Exercice 12 : ($\star$)
Raisonner par analyse-synthèse.
Pour la partie analyse, chercher à encadrer x.
Solution : $[0,1[\cup [2,6[$

Exercice 13 : ($\star$)
Faire différents cas selon la position de x par rapport $\lfloor x \rfloor + \frac{1}{2}$ et de y par rapport à $\lfloor y \rfloor + \frac{1}{2}$.

Exercice 14 : ($\star\star$)
Raisonner par double inégalité pour prouver la première égalité. On pourra partir de $\lfloor x \rfloor \leq x$ et de $\lfloor nx \rfloor \leq nx$ puis utiliser la croissance de la fonction partie entière
Appliquer le résultat précédent en remplaçant x par $x + \frac{k}{n}$ puis effectuer la division euclidienne de $\lfloor nx \rfloor$ par n : $\lfloor nx \rfloor = nq + r$ avec $r \in [\![0, n-1]\!]$ et $q \in \mathbb{Z}$.

II Généralités sur les fonctions

Exercice 15 : ($\star$)

1. *Solution :* f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$ et est impaire.
2. *Solution :* f est définie sur $]1, +\infty[$ et n'est ni paire ni impaire.
3. *Solution :* f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et est impaire.

Exercice 16 :
Utiliser les définitions.

Exercice 17 :

1. *Solution :* $\mathbb{R} \setminus \{2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}$

2. Montrer que f est 2π-périodique et impaire.
Solution : On effectue une symétrie par rapport à l'origine puis des translations de vecteur $(2k\pi, 0)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 18 : ($\star$) On peut montrer que f et g sont $T_1 T_2$ périodique puis que $f+g$ est $T_1 T_2$ périodique.

Exercice 19 : ($\star\star$)
Raisonner par l'absurde pour montrer une des deux implications.

Exercice 20 : ($\star\star$)
On raisonne par l'absurde. Supponsons que f ne soit pas strictement décroissante (et pas que f est croissante), c'est-à-dire, en écrivant la négation de la proposition logique, qu'il existe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $x_1 < x_2$ et $f(x_1) \leq f(x_2)$.
En utilisant les deux hypothèses, montrer que $f \circ f \circ f(x_1) \leq f \circ f \circ f(x_2)$ et que $f \circ f \circ f(x_1) > f \circ f \circ f(x_2)$ ce qui donne une contradiction.

Exercice 21 :
Ecrire la négation de f est majorée.

III Bijectivité

Exercice 22 :
Montrer que f est strictement monotone.
Solution : f est bijective de $]0,+\infty[$ vers $]5,+\infty[$.

Exercice 23 : ($\star$)
Résoudre l'équation $f(x) = y$.
Solution : $f^{-1}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ x & \mapsto & \frac{2x+1}{x-1} \end{array}$

Exercice 24 : ($\star$)

1. Exhiber un contre-exemple.
Solution : f n'est pas bijective.
2. Résoudre l'équation $g(x) = y$ où $x \in \mathbb{R}^+$ et $y \in [-1,1[$.
Solution : $g^{-1}: \begin{array}{ccc} [-1,1[& \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \end{array}$

IV Dérivation

Exercice 25 :
Solution : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1,2\}$, $f_1'(x) = -\frac{x^2-2}{(x^2-3x+2)^2}$, $\forall x \in]-\infty, 2[$, $f_2'(x) = \frac{4-x}{2(2-x)\sqrt{2-x}}$ *et* $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_3(x) = \frac{\sqrt{x+\sqrt{x^2+1}}}{2\sqrt{x^2+1}}$.

Exercice 26 :
Solution : $f'(x) = -\frac{2(x-2)}{(x-1)^3}$.

Exercice 27 : ($\star$)
Solution : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(x-1)(2-x)^3}}$.

Exercice 28 : ($\star$)
Etudier le signe de f'. On peut comparer $f(0)$ et $f(2)$.
Solution : f n'est pas décroissante sur son ensemble de définition.

Exercice 29 : ($\star$)
Etudier $x \mapsto 2x\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 30 : ($\star$)
Etudier $x \mapsto x^4 - x^2 - 2x - 2$.

Exercice 31 :

1. Etudier les variations de f.
Solution : $f'(t) = -\frac{1}{t^2} - 2t$.
2. Montrer que f' ne s'annule pas et appliquer la formule de dérivation de la réciproque.
Solution : g est dérivable sur $[0,+\infty[$ *et* $g'(t) = -\dfrac{g(t)^2}{2g(t)^3+1}$.

Exercice 32 : ($\star$)

1. Etudier la fonction f.
2. Etudier les points d'annulation de f'.
Solution : f^{-1} *est dérivable sur* $]-\infty, 1[$.
3. Utiliser la formule de la dérivée de la réciproque et remarquer que $f(1) = 1-e$.
Solution : $\left(f^{-1}\right)'(1-e) = -\frac{1}{3e}$

Exercice 33 : ($\star$)
Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x) = -\frac{2}{3}x^{-5/3} + \frac{3}{2}x^{-5/2}$.