Indications du chapitre 4 : Nombres complexes

I Ensemble des nombres complexes

Exercice 1 :
Solution : $\mathrm{Re}(z_1) = 22$, $Im(z_1) = 19$, $\mathrm{Re}(z_2) = -2$, $Im(z_2) = 3$.

Exercice 2 :
Solution : $\bar{z}_1 = -i(4+2i)^2$, $\bar{z}_2 = -\frac{i\sqrt{3}}{1-6i}$, $\bar{z}_3 = \frac{\bar{z}(1+iz)}{2\bar{z}+4iz}$.

Exercice 3 :
Multiplier le numérateur et le dénominateur par $\bar{z}$.
Solution : $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Re}(z)^2+Im(z)^2}$ *et* $Im\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{Im(z)}{\mathrm{Re}(z)^2+Im(z)^2}$.

Exercice 4 : ($\star$)
Calculer la partie réelle de $z+\frac{1}{z}$ en fonction de la partie réelle et de la partie imaginaire de z.

Exercice 5 :
Solution : On pose $x = \mathrm{Re}(z)$ *et* $y = Im(z)$, *alors* $\mathrm{Re}(Z) = \dfrac{2-x-x^2-y^2}{(x-1)^2+y^2}$ *et* $Im(Z) = -\dfrac{3y}{(x-1)^2+y^2}$.

Exercice 6 : ($\star$)
Ecrire z sous la forme $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.
Solution : $\{\frac{3-4i}{8}\}$

II Module

Exercice 7 : ($\star$)
Soit $z \in \mathbb{C}$.

- Si $|z| \geq 1$, on a $|z|^2 \geq |z|$ et conclure.
- Si $|z| < 1$. Remarquer que $|z| = |z-z^2+z^2|$ et utiliser l'inégalité triangulaire pour montrer que : $|z| \leq |z||z-1|+|z|^2$ et conclure.

Exercice 8 : ($\star\star$)
Faire une preuve par récurrence.

Exercice 9 : ($\star\star\star$)
Faire une récurrence. Pour l'initialisation ($n=2$), utiliser, pour $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) = |z| \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^+$.

III Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

Exercice 10 :
Solution : $\cos(3\theta) = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$, $\quad \sin(3\theta) = 3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta$.

Exercice 11 : ($\star$)
Utiliser la factorisation par l'angle moitié.
Solution : $\mathrm{Re}(z) = \dfrac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta-3\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$.

Exercice 12 : ($\star\star$)
Remarquer que $\sin\left(5\frac{\pi}{5}\right) = 0$ pour en déduire que $x = \sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est solution de l'équation du second degré : $16x^2-20x+5=0$.
Solution : $\sin(5\theta) = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$ et $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

Exercice 13 : ($\star$)
Simplifier les expressions faisant apparaître t en utilisant les formules de trigonométrie.

Exercice 14 : ($\star$)
Solution : $\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$.

Exercice 15 : ($\star\star$)

1. Remarquer qur $\cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{ik\pi/3}\right)$ puis utiliser la formule de sommation de suites géométriques.
   Solution : $\dfrac{\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{\sqrt{3}2^n}$.

2. Remarquer qur $\sin(kx) = \mathrm{Im}\left(e^{ikx}\right)$ puis utiliser la formule de sommation de suites géométriques.
Solution : $\dfrac{\cos x - (\cos x)^{n+1}\cos(nx)}{\sin x}$ $si\, x \not\equiv 0\, mod\, \pi, \quad 0\, si\, x \equiv 0\, mod\, \pi.$

IV Argument d'un nombre complexe non nul

Exercice 16 :

1. Remarquer que $2013 = 167 * 12 + 9$.
Solution : $-i2^{2013}$
2. *Solution :* -4
3. *Solution :* $2^n \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^n \left(\cos\frac{n\theta}{2} + i\sin\frac{n\theta}{2}\right)$.
4. *Solution :* $\dfrac{31-8i}{25}$.

Exercice 17 :
Solution : $z_1 = e^{i(a+\pi/2)}$, $z_2 = e^{i(-a+\pi/2)}$, $z_3 = e^{i(a+\pi)}$.

Exercice 18 :

1. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
Solution : $z_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{2} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2} = \sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$
2. Identifier les parties réelle et imaginaire.
Solution : $\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ *et* $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$.

Exercice 19 :
Solution : $2^{10}e^{-i\frac{\pi}{3}}$

Exercice 20 :
Solution : $|z_1| = 2\sqrt{2}$, $Arg((z_1) = -\frac{7\pi}{12}$, $|z_2| = 4\sqrt{2}$, $Arg(z_2) = -\frac{\pi}{4}$, $|z_3| = \frac{(2+\sqrt{3})\sqrt{2}}{4}$, $Arg((z_3) = -\frac{\pi}{6}$, $|z_4| = 4\sqrt{3}$, $Arg(z_4) = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 21 : (⋆)
Utiliser la forme trigonométrique de $1+i$ et de $1-i$ et la factorisation par l'angle moitié.
Solution : $z = \frac{1}{\tan\frac{\pi}{8}}e^{3i\pi/4}$

Exercice 22 :
Si $z \neq 0$, écrire z sous forme trigonométrique.
Solution : $\{0, 1, -1, i, -i\}$

Exercice 23 : (⋆)
Se ramener à une condition pour q'une exponentielle soit réelle.
Solution : $\sqrt{6} + i\sqrt{2} = 2\sqrt{2}e^{i\pi/6}$ *et* $(\sqrt{6} + i\sqrt{2})^n \in \mathbb{R} \Leftrightarrow n \in 6\mathbb{N}$.

Exercice 24 : (⋆⋆)
Utiliser la facorisation par l'angle moitié pour aboutir à une disjonction de cas en fonction du signe de $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.
Solution : si $\theta \in]-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$, $|z| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ *et* $\arg(z) \equiv \frac{3\theta}{2}\,[2\pi]$,
si $\theta \in]\pi + 4k\pi, 3\pi + 4k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$, $|z| = -2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ *et* $\arg(z) \equiv \pi + \frac{3\theta}{2}\,[2\pi]$,
si $\theta \equiv \pi\,[2\pi]$, *alors* $z = 0$.

Exercice 25 : (⋆⋆)
Remarquer que : $\sum_{p=0}^{2n}(-1)^p \begin{pmatrix} 4n \\ 2p \end{pmatrix} = \mathrm{Re}((1+i)^{4n})$ et $\sum_{p=0}^{2n-1}(-1)^p \begin{pmatrix} 4n \\ 2p+1 \end{pmatrix} = \mathrm{Im}((1+i)^{4n})$.
Solution : $\sum_{p=0}^{2n}(-1)^p \begin{pmatrix} 4n \\ 2p \end{pmatrix} = (-1)^n 2^{2n}$
et $\sum_{p=0}^{2n-1}(-1)^p \begin{pmatrix} 4n \\ 2p+1 \end{pmatrix} = 0$.

V Équations algébriques

Exercice 26 : (⋆⋆)
Linéariser $\cos^3$ et $\sin^3$ puis utiliser la même méthode que dans l'exercice 22.
Solution : $(\cos^3)^{(n)} : x \mapsto \frac{3^n}{4}\cos\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{3}{4}\cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$
et $(\sin^3)^{(n)} : x \mapsto -\frac{3^n}{4}\sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right) + \frac{3}{4}\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$.

Exercice 27 :
Calculer les racines carrées de $1+i$ sous forme algébrique et trigonométrique.
Solution : les racines carrées de $1+i$ *sont* $\pm 2^{1/4}e^{i\pi/8} = \pm\left(\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\right)$ $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}}$ *et* $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}}$

Exercice 28 :
Utiliser un système constitué d'une équation sur la partie réelle, d'une équation sur la partie imaginaire et une équation sur le module au carré.
Solution : $\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{37}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{37}-1}{2}}\right)$

Exercice 29 :

1. *Solution :* $1+3i$ *et* $3-i$
2. *Solution :* $-1-i$ *et* $-3-2i$

Exercice 30 :
Se ramener à une équation du second ordre.
Solution : $\pm\sqrt[4]{2}e^{-i\pi/8}, \pm i$.

Exercice 31 : ($\star$) Se ramener à une équation du second ordre et utiliser la méthode de calcul de racines carrées d'un complexe.
Solution : $1+i, -1-i, 1+2i, -1-2i$.

Exercice 32 : ($\star$)
Soit $z \in i\mathbb{R}$, soit $y \in \mathbb{R}$ tels que : $z = iy$. Montrer que :

$$z^3 - 2z^2 + 2(2-3i)z - 20 = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2y^2 + 6y - 20 = 0 \\ -y^3 + 4y = 0 \end{array} \right.$$

La seconde équation donne $y = 0$ ou $y = 2$ ou $y = -2$ et en réinjectant dans la première équation, seul $y = 2$ convient. Ainsi $z_0 = 2i$.
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$,

$$(\forall z \in \mathbb{C}, z^3 - 2z^2 + 2(2-3i)z - 20 = (z-2i)(az^2 + bz + c) \Leftrightarrow \ldots$$

$$\Leftrightarrow a = 1, b = -2+2i, c = -10i.$$

Après calcul, les racines de $z^2 + (-2+2i)z - 10i = 0$ sont $z_1 = 3+i$, $z_2 = -1-3i$.
Solution : $z_0 = 2i, z_1 = 3+i, z_2 = -1-3i$.

VI Racines n-ièmes

Exercice 33 : ($\star$) Se ramener à une équation du second ordre et utiliser la méthode de calcul de racines cubiques d'un complexe.
Solution : $2^{1/6}e^{-i\pi/12}, 2^{1/6}e^{i7\pi/12}, 2^{1/6}e^{i15\pi/12}, \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}, \dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}, i$.

Exercice 34 : ($\star\star$)
Ramener l'équation à $\left(\dfrac{\sqrt{2}(z+i)}{z+1}\right)^4 = 1$ et utiliser les racines quatrièmes de l'unité ou se ramener à deux équations de degré 2.
Solution : $\dfrac{-\sqrt{2}i-1}{1+\sqrt{2}}, \dfrac{\sqrt{2}i-1}{1-\sqrt{2}}, \dfrac{(1+\sqrt{2})(-1-i\sqrt{2})}{3}, \dfrac{(1-\sqrt{2})(-1+i\sqrt{2})}{3}$.

Exercice 35 : ($\star$)

1. *Solution :* $u+v=-1$, $u^2 = -2-u$.
2. Remarquer que $\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{7}\right) + \sin\left(\frac{8\pi}{7}\right) = \operatorname{Im}(u)$ puis que u est racine du polynôme $X^2 + X + 2$ et enfin, déterminer le signe de cette quantité.
   Solution : $\frac{\sqrt{7}}{2}$.

Exercice 36 :
Solution : $\{\sqrt[6]{2}e^{i(\frac{\pi}{9}+k\frac{\pi}{3})}, k \in [\![0,5]\!]\}$.

Exercice 37 : ($\star\star$)

1. Utiliser les racines quatrièmes de l'unité.
   Solution : $0, -\frac{3}{5} + \frac{i}{5}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{5} - \frac{i}{5}$
2. Si les points appartiennent à un même cercle, le centre appartient aux médiatrices de tous les segments formés à partir de deux points.
   En utilisant les points d'affixe $-\frac{3}{5}+\frac{i}{5}$ et $-\frac{3}{5}-\frac{i}{5}$ puis 0 et $-\frac{2}{3}$, déterminer les coordonnées du centre. Puis calculer 4 modules pour prouver que les points sont bien sur un même cercle.
   Solution : Centre $(-\frac{1}{3}, 0)$ *et rayon* $\frac{1}{3}$.

Exercice 38 : ($\star\star$)
Montrer que $z = -(a+i)^4$.
Solution : $\pm\dfrac{(a-1)+i(1+a)}{\sqrt{2}}, \pm i\dfrac{(a-1)+i(1+a)}{\sqrt{2}}$.

Exercice 39 : ($\star\star$)
Etablir le lien entre la quantité à calculer et $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} \cos\frac{(2k+1)\pi}{11}$.

VII Exponentielle complexe

Exercice 40 :

1. *Solution :* $\left\{\frac{i\pi}{2} + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
2. *Solution :* $\{\ln 2 + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
3. *Solution :* $\left\{\ln 2 + \frac{i\pi}{2} + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
4. *Solution :* $\left\{\frac{\ln 2}{2} + \frac{i\pi}{6} + ik\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Exercice 41 : ($\star$)
Se ramener à une équation du second degré en e^z.
Solution : $\left\{i\frac{2\pi}{3} + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{i\frac{4\pi}{3} + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

VIII Interprétation géométrique des nombres complexes

Exercice 42 : ($\star$)

Utiliser le quotient $\dfrac{z^4 - z^2}{z - z^2}$.

Solution : $\mathrm{Re}\, z = -\frac{1}{2}$ *ou* $\mathrm{Im}\, z = 0$.

Exercice 43 : ($\star\star$)

Utiliser le quotient $\dfrac{z + i}{\frac{1}{z} + i}$.

Solution : $\mathrm{Re}\, z = 0$ *ou* $|z - i| = \sqrt{2}$.

Exercice 44 : ($\star$)

1. *Solution :* $|a| = 2$, $Arg(a) = -\frac{\pi}{6}$.
2. *Solution :* $f(z) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$.
3. *Solution :* $b = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2} = 2e^{i\frac{\pi}{12}}$.
4. *Solution :* $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.