Indications du chapitre 5 : Fonctions usuelles

I Fonctions logarithmes, exponentielle, puissances

Exercice 1 :

1. *Solution :* $x \mapsto \dfrac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$
2. *Solution :* $x \mapsto \dfrac{2x(\ln x - 1)}{(\ln(x))^3}$
3. *Solution :* $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(x)}$
4. *Solution :* $x \mapsto -\dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$
5. *Solution :* $x \mapsto (1-2x)e^{-2x}$
6. *Solution :* $x \mapsto \dfrac{2xe^{2x}}{(x+1)^3}$

Exercice 2 : ($\star$)
Ne pas oublier de déterminer le domaine de définition de l'inéquation.
Solution : $\left]1, \sqrt{\frac{e}{e-1}}\right[$.

Exercice 3 : ($\star$)
Montrer que f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et déterminer ses limites en $\pm\infty$.
Solution : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f^{-1}(x) = \ln(e^x - 1)$.

Exercice 4 :

1. *Solution :* 0
2. Factoriser par x^2 dans le logarithme.
   Solution : 0
3. *Solution :* 0

Exercice 5 : ($\star$)

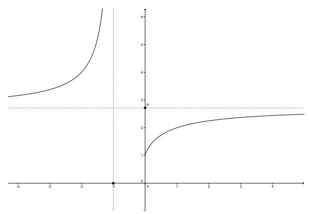
1. *Solution : la fonction est croissante sur* $]0, e^{-1/2}]$ *et décroissante sur* $[e^{-1/2}, +\infty[$ *et tend vers* $-\infty$ *en* 0 *et vers* 0 *en* $+\infty$.
2. *Solution : la fonction est croissante sur* $\mathbb{R}$, *tend vers* -1 *en* $-\infty$ *et vers* 1 *en* $+\infty$.

Exercice 6 : ($\star$)

1. Etudier les variations de g et appliquer le théorème de la bijection à la fonction g sur un intervalle bien choisi.
2. *Solution :* g *est négative sur* $]-\infty, \alpha]$ *et positive sur* $[\alpha, +\infty[$.
3. Exprimer f' en fonction de g.
   Solution : f *est décroissante sur* $]0, \alpha]$ *et croissante sur* $[\alpha, +\infty[$.
4. Remarquer que f admet un mininum égal à $f(\alpha)$.

Exercice 7 : ($\star\star$)
Calculer f' et étudier le signe de $g : x \mapsto a(1+bx)\ln(1+bx) - b(1+ax)\ln(1+ax)$.
Comparer $f\left(\frac{1}{a}\right)$ et $f\left(\frac{1}{b}\right)$.

Exercice 8 : ($\star$)
Traduire les puissances en exponentielles et logarithmes.
Solution :



Exercice 9 : ($\star$) Ecrire $f(x) = \exp\left(\frac{x}{x-1}\ln x\right)$. On a : $f'(x) = \frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2} > 0$. *Solution :* f est strictement croissante sur $[0,1[$ et sur $]1, +\infty[$.

II Fonctions cosinus et sinus hyperboliques

Exercice 10 : ($\star$)
Dériver deux fois $x \mapsto \operatorname{ch} x - 1 - \frac{x^2}{2}$.

Exercice 11 : ($\star$)
Pour étudier le signe de f', utiliser la croissance de sh.
Solution : f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.

Exercice 12 : ($\star\star$)

1. Utiliser la définition de ch et sh.

2. Faire apparaitre un produit télescopique pour le calcul de u_n.
   Solution : $u_n = \dfrac{\operatorname{sh} x}{2^n \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)}$ *si* $x \neq 0$, $u_n = 1$ *si* $x = 0$,

3. Commencer par calculer $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} y}{y}$ en utilisant un taux d'accroissement.
   Solution : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$ *si* $x \neq 0$, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ *si* $x = 0$.

Exercice 13 : (⋆⋆)

1. Utiliser la forme exponentielle et se ramener à une équation d'ordre 2 en e^x.
   Solution : $\ln(2+\sqrt{5})$.
2. Utiliser la question précédente et la monotonie de sh.
   Solution : $]-\infty, \ln(2+\sqrt{5})]$.
3. Utiliser la forme exponentielle et se ramener à une équation d'ordre 2 en e^x.
   Solution : $\ln(2+\sqrt{3}), \ln(2-\sqrt{3})$.
4. Utiliser la question précédente et la monotonie de ch.
   Solution : $[\ln(2-\sqrt{3}), \ln(2+\sqrt{3})]$.

Exercice 14 :
Utiliser la définition avec les exponentielle.

Exercice 15 : (⋆⋆)

1. (a) Montrer que f est continue, strictement monotone donc bijective de ...vers ....
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}^+$, $f\left(\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right) = \frac{\exp\left(\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right)+\exp\left(-\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right)}{2}$.
   Ainsi $f(x) = \dfrac{(x+\sqrt{x^2-1}) + \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}}{2} = \cdots = x$.
   Conclure.
2. (a) Montrer que sh est continue, strictement monotone donc bijective de ...vers ....
   (b) De même, calculer $\operatorname{sh}(\ln(x+\sqrt{x^2+1}))$.

III Fonctions circulaires réciproques

Exercice 16 : (⋆)
Etudier $f : x \mapsto \operatorname{Arccos} \frac{1-x^2}{1+x^2} - 2\operatorname{Arctan}|x|$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

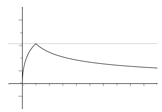
Exercice 17 : (⋆⋆)
Calculer la dérivée de la fonction apparaissant dans le membre de gauche.
Solution : $]-1, 1]$

Exercice 18 : (⋆⋆)
Calculer la dérivée de la fonction apparaissant dans le membre de gauche.
Solution : $\mathbb{R}$

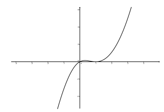
Exercice 19 : (⋆⋆)
Dériver $x \mapsto \operatorname{Arcsin}\sqrt{1-x^2} - \operatorname{Arctan}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ et utiliser la continuité et la valeur en 0 pour déterminer les constantes.

Exercice 20 : (⋆)

1. *Solution :*



2. *Solution :*



Exercice 21 : (⋆)
Faire une étude de fonctions.

Exercice 22 : (⋆⋆)

1. *Solution :* $\mathbb{R} \setminus \{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.
2. *Solution :* f est 2π-périodique et impaire.
3. *Solution :* $\frac{1-\cos x}{\sin x} = \tan \frac{x}{2}$
4. *Solution :* $f(x) = \frac{x}{2}$
5. Utiliser la parité puis la périodicité.
6. *Solution :* $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

Exercice 23 : (⋆)
Utiliser les formules de trigonométrie.

1. *Solution :* $\dfrac{1-6x^2+x^4}{(1+x^2)^2}$
2. *Solution :* $\dfrac{x(3-x^2)}{(1+x^2)^{3/2}}$

Exercice 24 : (⋆⋆)

- En utilisant la formule donnant $\tan(a+b)$, montrer que : $\tan(\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y) = \dfrac{x+y}{1-xy}$.
- En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que : $\operatorname{Arctan} x + \operatorname{Arctan} y = \operatorname{Arctan} \dfrac{x+y}{1-xy} + k\pi$.

- Comme $\mathrm{Arctan}\,x, \mathrm{Arctan}\,y, \mathrm{Arctan}\,\dfrac{x+y}{1-xy} \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, montrer que $k \in \{-1, 0, 1\}$.
- Si $\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,y \in \left]-\pi, -\dfrac{\pi}{2}\right[$, remarquer que $k = -1$ et que $\mathrm{Arctan}\,\dfrac{x+y}{1-xy} \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On a donc $\mathrm{Arctan}\,x < \mathrm{Arctan}\,(-y)$ donc $x < -y$, ainsi $x + y < 0$. De plus $\dfrac{x+y}{1-xy} > 0$. En déduire le signe de $1 - xy$.
- Si $\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,y \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, 0\right[$, raisonner de même.
- Si $\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,y \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, raisonner de même.
- Si $\mathrm{Arctan}\,x + \mathrm{Arctan}\,y \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \pi\right[$, raisonner de même.

Exercice 25 : $(\star\star)$

1. Appliquer la fonction cosinus.
   Solution : $\{\frac{\sqrt{5}}{5}\}$
2. Appliquer la fonction sinus.
   Solution : $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

Exercice 26 : $(\star\star)$

1. Appliquer la fonction tangente.
   Solution : $\{\frac{-3+\sqrt{17}}{4}\}$
2. Appliquer la fonction sinus.
   Solution : $\{0, \frac{\sqrt{14}}{8}, -\frac{\sqrt{14}}{8}\}$

Exercice 27 : $(\star\star)$

Montrer que $\tan\left(4\mathrm{Arctan}\,\frac{1}{5} - \mathrm{Arctan}\,\frac{1}{239}\right) = 1$ puis effectuer des encadrements.