PCSI 1 — 2023/2024

Indications du chapitre 6 : Suites numériques : propriétés globales

I Généralités sur les suites

Exercice 1 : (⋆)

1. Raisonner par récurrence.
2. Etudier le signe de $u_{n+1} - u_n$ en utilisant l'expression conjuguée. On se ramène à l'étude du signe d'un polynôme de degré 2.

Exercice 2 : (⋆⋆)

Remarquer que si (u_n) est croissante, alors : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ nu_{n+1} \geq \sum_{k=1}^{n} u_k$.

II Suites arithmétiques, suites géométriques, arithmético-géométriques

Exercice 3 : (⋆)

1. Raisonner par récurrence.
2. Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   Solution : (v_n) est arithmétique de raison $\frac{3}{2}$.
3. *Solution : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 1 + \frac{3}{2}n$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2}{2+3n}$.*

Exercice 4 : (⋆)

1. Raisonner par récurrence et étudier le signe de $u_{n+1} - 2$.
2. *Solution : (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{2}$.*
3. *Solution : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \dfrac{3^{n-1}}{2^{n-2}}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{2^{n-2} - 2.3^{n-1}}{2^{n-2} - 3^{n-1}}$.*

Exercice 5 :

Etudier la suite $(u_n - 3)$.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3 - \dfrac{1}{3^{n-1}}$

Exercice 6 :

Etudier la suite $(u_n - 2)$.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2 - (-1)^n$

Exercice 7 : (⋆)

Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n et remarquer que (v_n) est arithmético-géométrique.

Solution : $v_n = 3.2^n - 1$ et $u_n = 3.2^n - 1 + n$.

III Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Exercice 8 :

Utiliser l'équation caractéristique.

Solution : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1+17n}{2^n}$.

Exercice 9 : (⋆)

Solution : $u_n = \dfrac{1}{3}(u_0 + 2u_1) + \dfrac{2(u_0 - u_1)}{3(-2)^n}$

Exercice 10 : (⋆⋆)

Utiliser les racines complexes de l'équation caractéristique et les propriétés des nombres complexes pour se ramener à une expression réelle.

Solution : $u_n = \dfrac{2\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)}{(\sqrt{2})^n}$

IV Suites récurrentes d'ordre 1

Exercice 11 :

Raisonner par récurrence.

Solution : La suite (u_n) est décroissante.

Exercice 12 :

Etudier le signe de $x \mapsto 1 + x^2 - x$.

Solution : La suite (u_n) est croissante.

Exercice 13 : (⋆⋆)

Etudier le signe de $x \mapsto x - \sqrt{1+x}$.

Solution : Si $u_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, alors (u_n) est constante égale à $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Si $u_0 \in]-1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}[$, alors (u_n) est croissante.

Si $u_0 \in]\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty[$, *alors* (u_n) *est décroissante.*

Exercice 14 : (★★)
Etudier le signe de $x \mapsto x - \ln(1+2x)$.
Solution : Soit α *l'unique réel non nul tel que* $\ln(1+2\alpha) = \alpha$.

Si $u_0 = \alpha$, *alors* (u_n) *est constante égale à* α.
Si $u_0 \in]0, \alpha[$, *alors* (u_n) *est croissante.*
Si $u_0 \in]\alpha, +\infty[$, *alors* (u_n) *est décroissante.*
Si $u_0 = 0$, *alors* (u_n) *est constante égale à* 0.