Indications du chapitre 7 : Primitives

I Calcul de primitives

Exercice 1 :
Se ramener à la forme $u' u^\alpha$.

1. *Solution :* $x \mapsto -\frac{1}{3(x^2-3x+10)^3}$
2. *Solution :* $x \mapsto \frac{1}{2}e^{x^2}$
3. *Solution :* $x \mapsto \frac{1}{2}(\mathrm{Arctan}\, x)^2$
4. *Solution :* $x \mapsto -\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3}$
5. *Solution :* $x \mapsto 2\sqrt{1+e^x}$
6. *Solution :* $x \mapsto \frac{(\ln(3x+6))^4}{4}$
7. *Solution :* $x \mapsto -\frac{1}{3(x^2-5x+9)^3}$

Exercice 2 :
Solution : $x \mapsto \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Exercice 3 :
On peut linéariser ou écrire $\sin^3(x) = \sin(x)(1-\cos^2(x))$.
Solution : $x \mapsto -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3(x)$.

Exercice 4 : (⋆⋆)
Utiliser les formules de l'angle double.
Solution : $\int^x \frac{1}{\sin t}\,dt = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right| + C_k$ *pour* $x \in]k\pi,(k+1)\pi[$ *et* $\int^x \frac{1}{\cos t}\,dt = \ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C_k$ *pour* $x \in \left]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[$

Exercice 5 :
Utiliser l'exponentielle complexe.
Solution : $x \mapsto e^{2x}\left(\frac{2}{13}\cos(3x) + \frac{3}{13}\sin(3x)\right)$

Exercice 6 :

1. *Solution :* 0,
2. *Solution :* $\frac{5}{3}$,
3. *Solution :* 0,
4. *Solution :* $\frac{3}{8}$,
5. Utiliser les formules de trigonométrie pour montrer que : $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.
   Solution : $\frac{\pi}{2}$,
6. *Solution :* $\ln\left(\frac{3}{2}\right)$.

Exercice 7 : (⋆)

Se ramener à la forme $u' u^\alpha$.

1. *Solution :* $\frac{1}{n+1}$
2. *Solution :* $\frac{2}{3}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{3}{2}}$

Exercice 8 :
Se ramener à la forme $u' u^\alpha$.

a. *Solution :* $x \mapsto \frac{1}{4}\ln^4(2x+4)$.
b. *Solution :* $x \mapsto \frac{1}{3}\sqrt{3x^2+2}$.

Exercice 9 : (⋆)

1. Raisonner par équivalences.
   Solution : $a=2$, $b=1$, $c=-2$
2. *Solution :* $2+2\ln 2$

Exercice 10 : (⋆⋆)
Etudier le signe de $x \mapsto \left(\int_0^x f\right)^2 - \int_0^x f^3$ en faisant intervenir l'étude de signe de $x \mapsto 2\int_0^x f - f^2(x)$.

II Intégration par parties et changement de variable

Exercice 11 :
Effectuer des intégrations par parties.

1. *Solution :* $x \mapsto x\mathrm{Arcsin}\, x + \sqrt{1-x^2} + \lambda$, *sur* $]-1,1[$
2. *Solution :* $x \mapsto x\tan x + \ln|\cos x| + \lambda_k$, *sur* $\left]\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+(k+1)\pi\right[$

Exercice 12 : (⋆)

1. Effectuer une intégration par parties avec $u(t) = \mathrm{Arctan}(t)$ et $v'(t) = t$ puis remarquer que $t^2 = (1+t^2)-1$.
   Solution : $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$

2. Effectuer une intégration par parties avec $u(t)=\cos^2(t)$ et $v'(t)=\cos(t)\sin^4(t)$.
   Solution : $\frac{2}{35}$

Exercice 13 : ($\star$)
Effectuer des intégrations par parties.

1. *Solution :* $x\mapsto x\mathrm{Arctan}\, x-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\lambda$, *sur* $\mathbb{R}$
2. *Solution :* $x\mapsto \frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+\lambda$, *sur* $\mathbb{R}^{+*}$

Exercice 14 :
Effectuer des intégrations par parties successives.
Solution : $x\mapsto \left(\frac{1}{2}x^3+\frac{5}{4}x^2-\frac{9}{4}x+\frac{37}{8}\right)e^{2x}$

Exercice 15 : ($\star$)
Calculer $\int^x t^3\cos t\,dt+i\int^x t^3\sin t\,dt$ en effectuant des intégrations par parties.
Solution : $\int^x t^3\cos t\,dt=(3x^2-6)\cos x+(x^3-6x)\sin x$ *et* $\int^x t^3\sin t\,dt=(-x^3+6x)\cos x+(3x^2-6)\sin x$.

Exercice 16 : ($\star$)

1. *Solution :* $x\mapsto \frac{x^2}{12}\cos 3x-\frac{x}{18}\sin 3x-\frac{1}{54}\cos 3x-\frac{3x^2}{4}\cos x+\frac{3x}{2}\sin x+\frac{3}{2}\cos x+C$, *sur* $\mathbb{R}$
2. *Solution :* $x\mapsto(-x^2+x-1)\cos x+(2x-1)\sin x+C$, *sur* $\mathbb{R}$
3. *Solution :* $x\mapsto\left(\frac{x^2}{2}\cos x+(\frac{x^2}{2}-x+1)\sin x\right)e^x+C$, *sur* $\mathbb{R}$
4. *Solution :* $x\mapsto\frac{1}{8}(2x^2+1)sh2x-\frac{1}{4}xch2x-\frac{x^3}{6}+C$, *sur* $\mathbb{R}$

Exercice 17 : ($\star$) Effectuer deux intégrations par parties.
Solution : $I_n=n\left(\left(\frac{\pi}{2}\right)^{n-1}-(n-1)I_{n-2}\right)$.

Exercice 18 : ($\star\star$)
Poser, pour $p\in\mathbb{N}$, $u_p=\dfrac{(-1)^pI_{2p}}{(2p)!}$ et $v_p=\dfrac{(-1)^pI_{2p+1}}{(2p+1)!}$. Calculer u_p-u_{p-1} et v_p-v_{p-1} puis sommer afin de faire apparaître des sommes télescopiques.
Solution : $I_{2n}=(-1)^n(2n)!\left(1+\sum_{p=1}^{n}\dfrac{(-1)^p}{(2p-1)!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{2p-1}\right)$
et $I_{2n+1}=(-1)^n(2n+1)!\left(\sum_{p=0}^{n}\dfrac{(-1)^p}{(2p)!}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^{2p}\right)$

Exercice 19 :
Effectuer le changement de variable $t=x^5$.
Solution : $\frac{\pi}{20}$

Exercice 20 :
Effectuer le changement de variable $t=e^x$.
Solution : $x\mapsto e^x-\ln(1+e^x)$.

Exercice 21 : ($\star$)

1. Effectuer le changement de variable $t=x^4$ et remarquer que $t=(t+1)-1$.
   Solution : $x\mapsto\frac{1}{4(x^4+1)}+\frac{1}{4}\ln(x^4+1)+C$ *sur* $\mathbb{R}$
2. Effectuer le changement de variable $t=e^x$.
   Solution : $x\mapsto \mathrm{Arctan}(e^x)+C$ *sur* $\mathbb{R}$
3. Effectuer le changement de variable $t=\sqrt{x}$.
   Solution : $x\mapsto 2\mathrm{Arctan}(\sqrt{x})+C$ *sur* $\mathbb{R}^{+*}$
4. Effectuer le changement de variable $t=\sqrt{x}$ puis une intégration par parties.
   Solution : $x\mapsto 2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}-2e^{\sqrt{x}}+C$ *sur* $\mathbb{R}^{+}$

Exercice 22 : ($\star$) Calculer une primitive de :

1. *Solution :* $x\mapsto \mathrm{Arctan}\sqrt{x^2-1}$
2. *Solution :* $x\mapsto 2\mathrm{Arctan}\sqrt{e^x-1}$

Exercice 23 :
Effectuer le changement de variable $t=\frac{x}{a}$.
Solution : $\int^x\frac{1}{\sqrt{a^2-t^2}}\,dt=\mathrm{Arcsin}\,\frac{x}{a}$ *et* $\int^x\frac{1}{a^2+t^2}\,dt=\frac{1}{a}\mathrm{Arctan}\,\frac{x}{a}$

Exercice 24 : ($\star$)

1. Remarquer que $t\mapsto\frac{1-t^2}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}}$ est continue sur $\mathbb{R}$. *Solution :* $\mathbb{R}^*$
2. On effectue dans $f(\frac{1}{x})$ le changement de variable $u=\frac{1}{t}$, on a $du=-\frac{1}{t^2}dt=-u^2dt$ donc :
$$f(\frac{1}{x})=\int_x^{\frac{1}{x}}\frac{1-\frac{1}{u^2}}{(1+\frac{1}{u^2})\sqrt{1+\frac{1}{u^4}}}\frac{-1}{u^2}du=\cdots\int_x^{\frac{1}{x}}\frac{1-u^2}{(1+u^2)\sqrt{1+u^4}}du=f(x).$$
3. Montrer que $f\left(\frac{1}{x}\right)=-f(x)$.

Exercice 25 : ($\star\star$)

1. Remarquer que F est une primitive d'une fonction continue.
2. *Solution :* $F(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)$.
3. La continuité donne : $F(\frac{\pi}{2})=\lim_{x\to(\pi/2)^-}F(x)$.
   Solution : $\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Exercice 26 : (⋆⋆)
Effectuer le changement de variable $t = \text{Arcsin}\, x$ puis faire des intégrations par parties.
Solution : $x \mapsto x(Arcsin\, x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}Arcsin(x) - 2x$.

III Fractions rationnelles

Exercice 27 :
Solution : $x \mapsto \ln|x-2| - \ln|x-1|$

Exercice 28 :
Solution : $x \mapsto \frac{1}{6}Arctan\left(\frac{3x+1}{2}\right)$

Exercice 29 : (⋆)

1. *Solution :* $x \mapsto -\ln|x-2| + \ln|x-3|$
2. *Solution :* $x \mapsto -\frac{1}{x+1}$
3. *Solution :* $x \mapsto \frac{2}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$

Exercice 30 : (⋆⋆) Effectuer un changement de variable.
Solution : $x \mapsto \frac{1}{6}\ln\frac{|x^2-2|}{x^2+1} + C_j$ *sur* $I_1 =]-\infty, -\sqrt{2}[$, $I_2 =]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$ *et* $I_3 =]\sqrt{2}, +\infty[$

Exercice 31 : (⋆)

a. Remarquer que $\frac{x^3+2x}{x^2+x+1} = x - 1 + \frac{2x+1}{x^2+x+1}$.
Solution : $\displaystyle\int^x \frac{t^3+2t}{t^2+t+1}\,dt = \frac{x^2}{2} - x + \ln|x^2+x+1| + C$ *sur* $\mathbb{R}$.

b. Remarquer que $\frac{2x-1}{(x+1)^2} = \frac{2(x+1)-3}{(x+1)^2}$.
Solution : $\displaystyle\int^x \frac{2t-1}{(t+1)^2}\,dt = 2\ln|x+1| + \frac{3}{x+1} + C(x)$ *où* $C(x)$ *constant sur* $]-\infty,-1[$ *et sur* $]-1,+\infty[$.

c. Remarquer que $\frac{2x}{x^2-x+1} = \frac{2x-1+1}{x^2-x+1}$.
Solution : $\displaystyle\int^x \frac{2t}{t^2-t+1}\,dt = \ln|x^2-x+1| + \frac{2\sqrt{3}}{3}Arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$ *sur* $\mathbb{R}$.

Exercice 32 : (⋆)
Solution : $x \mapsto \frac{1}{2}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)$

Exercice 33 : (⋆⋆)
Raisonner par identification.
Solution : $\int^x \frac{1}{t^3+1}\,dt = \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}Arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + C(x)$, *où* $C(x)$ *constant sur* $]-\infty,-1[$ *et sur* $]-1,+\infty[$