PCSI 1

Indications du chapitre 8 : Equations différentielles

2023/2024

I Equations différentielles linéaire du premier ordre

Exercice 1 :
Appliquer la formule du cours.

1. *Solution :* $x \mapsto \frac{\lambda}{x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
2. *Solution :* $x \mapsto \lambda e^{-1/x^2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Exercice 2 :
Chercher une solution particulière de la forme $x \mapsto A\cos x + B\sin x$.
Solution : $y(x) = -\frac{2}{5}\cos(x) - \frac{1}{5}\sin(x) + \lambda\exp\left(\frac{x}{2}\right)$

Exercice 3 :

1. *Solution :* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\exp(x^2) + \operatorname{ch} x \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
2. *Solution :* $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\exp(\cos x) + 2\cos x + 2 \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 4 :

1. Commencer par réfléchir au degré du polynôme recherché.
   Solution : $x \mapsto x - 2$
2. *Solution :* $\left\{ \begin{array}{ccc}]-1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda(x+1)e^{-x} + x - 2 \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
3. *Solution :* $x \mapsto (x+1)e^{1-x} + x - 2$

Exercice 5 : ($\star\star$)
Analyse : Supposons qu'il existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)f(-x) = 1$.
Posons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)f(-x)$. Alors, on montre que $g' = 0$, donc, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x)f(-x) = \lambda$, ainsi, on montre que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{\lambda}f(x)$.
En résolvant cette équation différentielle, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mu e^{\frac{1}{\lambda}x}$, $\mu \in \mathbb{R}$.
Synthèse : Posons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mu e^{\frac{1}{\lambda}x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)f(x) = \ldots$. Donc f est solution ssi $\frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\mu^2}$.
Conclure.
Solution : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mu\exp\frac{x}{\mu^2} \end{array}, \mu \in \mathbb{R}^* \right\}$

Exercice 6 : ($\star$)
Résoudre la première équation différentielle et injecter les solutions dans la seconde.
Solution : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda(x-1)e^x \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 7 : ($\star\star\star$)
Raisonner par analyse-sytnthèse. Commencer par prouver que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en calculant les limites des taux d'accroissements. Le calcul de la dérivée conduit à une équation différentielle.
Solution : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda x e^x \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 8 :
Résoudre $y' + y = 2e^x$ et $y' + y = 4\sin x + 3\cos x$ et appliquer le principe de superposition.
Solution : $x \mapsto \lambda e^{-x} + e^x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{7}{2}\sin x$, $x \in \mathbb{R}$

Exercice 9 : ($\star$)

1. Utiliser le principe de superposition et déterminer de quelle forme il faut chercher les solutions particulières.
   Solution : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda e^{-t} - \frac{1}{2}\cos t + \frac{1}{2}\sin t - \frac{6}{5}\cos 2t + \frac{3}{5}\sin 2t \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$
2. Trouver une solution évidente.
   Solution : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \lambda\exp(-\operatorname{Arctan} t) + \operatorname{Arctan} t - 1 \end{array}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 10 :

a. Utiliser la méthode de variation de la constante.
   Solution : $y(x) = \frac{1}{4} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{2} + \lambda e^{-2x}$
b. Utiliser la méthode de variation de la constante.
   Solution : $y(x) = (\frac{x^2}{2} + x + \lambda)e^x$

Exercice 11 :
Utiliser la méthode de variation de la constante.

1. *Solution :* $x \mapsto \frac{x^2}{2}e^{x^2/2} + \lambda e^{x^2/2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

2. *Solution :* $x \mapsto \frac{-\lambda+x}{x(x-1)}$, $\lambda \in \mathbb{R}$
3. *Solution :* $x \mapsto \lambda x^2 + \frac{x^4}{2} + 2x^3 + 2x + \frac{1}{2}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Exercice 12 : ($\star$)

a. Utiliser la méthode de variation de la constante.
   Solution : $y(x) = \lambda(x-1) + (x-1)\ln\frac{x}{x-1}$
b. Utiliser la méthode de variation de la constante.
   Solution : $y(x) = \lambda e^{-x} + e^{-x}\ln(1+e^x)$

Exercice 13 : ($\star\star$)

Utiliser la méthode de variation de la constante.
Solution : $y(x) = \frac{1}{x} + \lambda \ln x$

II Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

Exercice 14 :

Appliquer les théorèmes du cours.

1. *Solution :* $x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-3x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
2. *Solution :* $x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
3. *Solution :* $x \mapsto \lambda\cos(\sqrt{3}x)e^{-x} + \mu\sin(\sqrt{3}x)e^{-x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
4. *Solution :* $x \mapsto \lambda e^{(-1-i\sqrt{3})x} + \mu e^{(-1+i\sqrt{3})x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$
5. *Solution :* $x \mapsto \lambda e^{ix} + \mu e^{(1-i)x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

Exercice 15 : ($\star\star$)

Faire différents cas selon le signe du discriminant associé à l'équation caractéristique. Remarquer que les solutions sont bornées ssi leur limite en $+\infty$ est finie.
Solution : $(a, b) \in (\mathbb{R}^+)^2 \setminus \{(0,0)\}$

Exercice 16 : ($\star\star$)

Poser $z(t) = y(\sin t)$ et montrer que $z'' + z = 0$.
Solution : $y(x) = Ax + B\sqrt{1-x^2}$.

Exercice 17 : ($\star\star$) Poser $z(t) = y(\tan t)$ et montrer que $z'' + m^2 z = 0$.

Solution : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\cos(m\mathrm{Arctan}\, x) + \mu\sin(m\mathrm{Arctan}\, x) \end{array}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$ et pour $m = 2$: $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \lambda\frac{1-x^2}{1+x^2} + 2\mu\frac{x}{1+x^2} \end{array}, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 18 : ($\star\star$)

Montrer que $z'' + 2z' + z = 0$.
Solution : $y(x) = Ae^{-x} + B\frac{e^{-x}}{x}$.

Exercice 19 : ($\star$)

Analyse : Supposons qu'il existe f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(-x)$.
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f''(x) + f(x) = 0$.
Résoudre l'équation $y'' + y = 0$.
Ainsi, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$.
Synthèse : Posons : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(-x)$ ssi $\lambda = \mu$.
Conclure. *Solution :* $\{x \mapsto \lambda(\sin x + \cos x),\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

Exercice 20 : ($\star\star$)

Raisonner par analyse-synthèse et calculer f'' pour obtenir une équation différentielle d'ordre 2.
Solution : Si $\alpha \equiv \frac{\pi}{2}$ mod π, $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mu\sin x \end{array}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$
Si $\alpha \not\equiv \frac{\pi}{2}$ mod π, $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \mu\cos\left(\frac{\pi}{4} - x + \frac{\alpha}{2}\right) \end{array}, \mu \in \mathbb{R} \right\}$

Exercice 21 :

Cherche une solution particulière de la forme vue en cours.

1. *Solution :* $x \mapsto e^x + (\lambda x + \mu)e^{2x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
2. *Solution :* $x \mapsto \frac{x^2}{2}e^{2x} + (\lambda x + \mu)e^{2x}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
3. *Solution :* $x \mapsto -\frac{1}{32}\cos(3x) + \lambda\cos x + \mu\sin x$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
4. *Solution :* $x \mapsto \frac{3x}{8}\sin x + \lambda\cos x + \mu\sin x$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Exercice 22 : ($\star\star$)

Montrer que $z'' - z = 1$.
Solution : $y(x) = \frac{Ae^x + Be^{-x} - 1}{x^2}$.

Exercice 23 : ($\star\star$)

Poser $z(t) = y(e^t)$ et montrer que $z'' + 2z' + z = (e^t + 1)^2$ et utiliser le principe de superposition.
Solution : $y(x) = \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{2}x + 1 + \frac{\lambda\ln x + \mu}{x}$.

Exercice 24 :

Linéariser le second membre.
Solution : $x \mapsto -\frac{1}{32}\cos(3x) + \frac{3x}{8}\sin x + \lambda\cos x + \mu\sin x$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Exercice 25 : (⋆)

Ecrire le sinus hyperbolique avec des exponentielles et utiliser le principe de superposition.

Solution : $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (\lambda x+\mu)e^{x}+\frac{x^2}{2}e^{x}-\frac{1}{4}e^{-x} \end{array} , \lambda,\mu\in\mathbb{R}\right\}$

Exercice 26 : (⋆⋆)

Faire différents cas selon le signe du dicriminant et les racines du polynôme caractéristique.

Solution :

Si $\lambda<1$ *et* $\lambda\neq 0$,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Ae^{(1+\sqrt{1-\lambda})x}+Be^{(1-\sqrt{1-\lambda})x}+\frac{e^{2x}}{\lambda}+\frac{\sin x}{\lambda-2}e^{x} \end{array} , A,B\in\mathbb{R}\right\}$$

Si $\lambda=0$, $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & Ae^{2x}+B+\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{\sin x}{2}e^{x} \end{array} , A,B\in\mathbb{R}\right\}$

Si $\lambda=1$, $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (Ax+B)e^{x}+e^{2x}-\sin x e^{x} \end{array} , A,B\in\mathbb{R}\right\}$

Si $\lambda>1$ *et* $\lambda\neq 2$,

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \left(A\cos(\sqrt{\lambda-1}x)+B\sin(\sqrt{\lambda-1}x)\right)e^{x}+\frac{e^{2x}}{\lambda}+\frac{\sin x}{\lambda-2}e^{x} \end{array} , A,B\in\mathbb{R}\right\}$$

Si $\lambda=2$, $\left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (A\cos(x)+B\sin(x))\,e^{x}+\frac{e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}x\cos x e^{x} \end{array} , A,B\in\mathbb{R}\right\}$