Problème facultatif : Révisions d'analyse

1. *Étude du cas* $|a| < 1$

   (a) - Soit $l \in \mathbb{R}$, on a :
   $$l = al + b \Leftrightarrow (1-a)l = b \Leftrightarrow l = \frac{b}{1-a}.$$
   - Posons $l = \frac{b}{1-a}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$x_{n+1} - l = ax_n + b - (al + b) = a(x_n - l).$$
   Donc $(x_n - l)$ est géométrique de raison a.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $x_n - l = a^n(x_0 - l)$, ainsi :
   $$x_n = a^n(x_0 - l) + l = a^n\left(x - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}.$$

   (b) Comme $|a| < 1$, on a : $\lim a^n = 0$ donc :
   $$\lim x_n = \frac{b}{1-a}.$$

   (c) i. Soit $n \in \mathbb{N}$, $f(x_{n+1}) = f(ax_n + b) = f(g_{a,b}(x_n)) = f(x_n)$ car $f \in \mathcal{E}(g_{a,b})$. Donc :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_{n+1}) = f(x_n).$$
   ii. Ainsi, la suite $(f(x_n))$ est constante. Or $f(x_0) = f(x)$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = f(x)$.
   De plus, comme f est continue, $\lim f(x_n) = f\left(\frac{b}{1-a}\right)$. Donc, par passage à la limite :
   $$f(x) = f\left(\frac{b}{1-a}\right).$$

   (d) - Analyse : supposons qu'il existe $f \in \mathcal{E}(g_{a,b})$. D'après la question précédente, f est constante.
   - Synthèse : soit f une fonction constante égale à $c \in \mathbb{R}$. Alors f est continue et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = c = f(ax+b)$. Donc $f \in \mathcal{E}(g_{a,b})$.
   - Conclusion : $\mathcal{E}(g_{a,b})$ est l'ensemble des fonctions constantes.

2. *Étude du cas* $|a| > 1$

   (a) - Supposons (1) vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a, d'après (1) :
   $$f\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right) = f\left(a\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right) + b\right) = f(x - b + b) = f(x).$$
   Donc (2) est vraie.
   - Supposons (2) vraie. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a, d'après (2) :
   $$f(ax+b) = f\left(\frac{ax+b}{a} - \frac{b}{a}\right) = f\left(x + \frac{b}{a} - \frac{b}{a}\right) = f(x).$$
   Donc (1) est vraie.
   - Ainsi (1) et (2) sont équivalentes.

   (b) Comme (1) et (2) sont équivalentes, on a : $\mathcal{E}(g_{a,b}) = \mathcal{E}(g_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}})$.
   Or, comme $|a| > 1$, on a $\left|\frac{1}{a}\right| < 1$. Donc, d'après 1., $\mathcal{E}(g_{\frac{1}{a},-\frac{b}{a}})$ est l'ensemble des fonctions constantes.
   Donc $\mathcal{E}(g_{a,b})$ est l'ensemble des fonctions constantes.

3. *Étude des points fixes de la fonction g lorsque* $|g'| \leq K < 1$

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}$, comme g est $\mathcal{C}^1$, d'après l'inégalité des accroissements finis : $|g(x) - g(0)| \leq K|x - 0| = K|x|$. Ainsi $-K|x| \leq g(x) - g(0) \leq K|x|$. D'où :
   $$g(0) - K|x| \leq g(x) \leq g(0) + K|x|.$$

   (b) i. Soit $x > 0$, on a : $g(x) \leq g(0) + Kx$ donc $g(x) - x \leq g(0) + (K-1)x$. Or $K - 1 < 0$ donc : $\lim\limits_{x \to +\infty}(g(0) + (K-1)x) = -\infty$. Ainsi :
   $$\lim_{x \to +\infty}(g(x) - x) = -\infty.$$
   ii. Soit $x < 0$, on a : $g(x) \geq g(0) + Kx$ donc $g(x) - x \geq g(0) + (K-1)x$. Or $K - 1 < 0$ donc : $\lim\limits_{x \to -\infty}(g(0) + (K-1)x) = +\infty$. Ainsi :
   $$\lim_{x \to -\infty}(g(x) - x) = -+\infty.$$

(c)
- Posons $h : x \mapsto g(x) - x$. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = g'(x) - 1 \leq K - 1 < 0.$$
Donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Ainsi h est strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$. De plus, comme $]\lim_{+\infty} h, \lim_{-\infty} h[=]-\infty, +\infty[$, on a : $0 \in]\lim_{+\infty} h, \lim_{-\infty} h[$.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique $L \in \mathbb{R}$ tel que $h(L) = 0$, c'est-à-dire tel que : $g(L) = L$.

4. *Étude de l'ensemble* $\mathcal{E}(g)$ *lorsque* $\left|g'\right| \leq K < 1$

(a)
- Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après l'inégalité des accroissements finis :
$$|x_{n+1} - L| = |g(x_n) - g(L)| \leq K|x_n - L|.$$
- Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|x_n - L| \leq K^n|x_0 - L|$. Or $|K| < 1$ donc $\lim K^n = 0$ ainsi :
$$\lim x_n = L.$$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$, $f(x_{n+1}) = f(g(x_n)) = f(x_n)$ car $f \in \mathcal{E}(g_{a,b})$. Donc la suite $(f(x_n))$ est constante.
Or $f(x_0) = f(x)$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = f(x)$.
De plus, comme f est continue, $\lim f(x_n) = f(L)$. Donc, par passage à la limite :
$$f(x) = f(L).$$

(c)
- Analyse : supposons qu'il existe $f \in \mathcal{E}(g)$. D'après la question précédente, f est constante.
- Synthèse : soit f une fonction constante égale à $c \in \mathbb{R}$. Alors f est continue et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = c = f(g(x))$. Donc $f \in \mathcal{E}(g)$.
- Conclusion : $\mathcal{E}(g)$ est l'ensemble des fonctions constantes.

5. *Étude de l'ensemble* $\mathcal{E}(g)$ *lorsque* $\left|g'\right| \geq K > 1$

(a)
- Soit $x \in \mathbb{R}$, on a $|g'(x)| \geq K > 1$ donc $g'(x) \neq 0$. Ainsi g' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et comme g' est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, g' est de signe constant sur $\mathbb{R}$.
- Si $g' > 0$, alors g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) \geq K$.
  - Soit $x > 0$. D'après l'inégalité des accroissements finis, $g(x) - g(0) \geq Kx$ donc $g(x) \geq Kx + g(0)$.
  Or $K > 0$ donc $\lim_{x \to +\infty} (Kx + g(0)) = +\infty$. Ainsi :
  $$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$
  - Soit $x < 0$. D'après l'inégalité des accroissements finis, $g(0) - g(x) \geq -Kx$ donc $g(x) \leq Kx + g(0)$.
  Or $K > 0$ donc $\lim_{x \to -\infty} (Kx + g(0)) = -\infty$. Ainsi :
  $$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty.$$
- Si $g' < 0$ alors, en appliquant le point précédent à $-g$, on a g strictement décroissante et :
$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty.$$

(b)
- g est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$ donc g est bijective de $\mathbb{R}$ vers $]\lim_{-\infty} g, \lim_{+\infty} g[$ ou $]\lim_{+\infty} g, \lim_{-\infty} g[$.
Donc g est bijective de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
Ainsi g admet une bijection réciproque définie sur $\mathbb{R}$.
- Comme g est continue, g^{-1} est continue.
- Comme g est dérivable et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) \neq 0$ alors g^{-1} est dérivable.
- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))}$. Or $|g'(g^{-1}(x))| \leq K$ donc :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ \left|\left(g^{-1}\right)'(x)\right| \leq \frac{1}{K}$$

(c)
- Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.
$$\begin{aligned} f \in \mathcal{E}(g) &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(g(x)) \\ &\Leftrightarrow \forall y \in \mathbb{R},\ f(g^{-1}(y)) = f(y) \quad \text{car } y = g(x) \Leftrightarrow x = g^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow f \in \mathcal{E}(g^{-1}) \end{aligned}$$
- Ainsi $\mathcal{E}(g) = \mathcal{E}(g^{-1})$. Or $\frac{1}{K} < 1$ donc g^{-1} vérifie l'hypothèse $\mathcal{H}$. Ainsi $\mathcal{E}(g^{-1})$ est l'ensemble des fonctions constantes.
- Donc $\mathcal{E}(g)$ est l'ensemble des fonctions constantes.

6. *Recherche des fonctions continues telles que* $f(x) = f(x^2)$

(a)
- g est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 2x$.
- On a $\lim\limits_{+\infty} |g'(x)| = +\infty$ donc $|g'|$ n'est pas majorée, ainsi g ne vérifie pas $\mathcal{H}$.
- On a $g'(0) = 0$ donc $|g'|$ n'est pas minorée par une constante strictement supérieure à 1 donc g g ne vérifie pas $\mathcal{H}'$.

(b)
- Pour $n = 0$, $x_n = x = x^{1/2^0}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $x_n = x^{1/2^n}$. Alors :

$$x_{n+1} = \sqrt{x_n} = (x^{1/2^n})^{1/2} = x^{1/2^{n+1}}.$$

- Donc, par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n = x^{1/2^n}$.
- On a $\lim x_n = x^0 = 1$ car $x > 0$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$, $f(x_{n+1}) = f_{x_{n+1}^2} = f(x_n)$.

(d)
- Analyse : supposons qu'il existe $f \in \mathcal{E}(g)$.
  - Soit $x > 0$ d'après la question précédente, la suite $(f(x_n))$ est constante.
    Or $f(x_0) = f(x)$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = f(x)$.
    De plus, comme f est continue, $\lim f(x_n) = f(1)$. Donc, par passage à la limite : $f(x) = f(1)$.
    Donc f est constante sur $\mathbb{R}^{+*}$.
  - Soit $x < 0$, comme $-x > 0$
    $$f(x) = f(x^2) = f((-x)^2 = f(-x) = f(1).$$
    Donc f est constante sur $\mathbb{R}^{-*}$.
  - Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, f est constante sur $\mathbb{R}$.
- Synthèse : soit f une fonction constante égale à $c \in \mathbb{R}$. Alors f est continue et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = c = f(g(x))$. Donc $f \in \mathcal{E}(g)$.
- Conclusion : $\mathcal{E}(g)$ est l'ensemble des fonctions constantes.

7. *Recherche des fonctions continues telles que* $f(x) = f(e^x)$

(a) On a : $f(0) = f(e^0) = f(1)$.

(b) Soit $x < 0$, $f(x) = f(e^x)$ et, comme $x < 0$, $e^x \in [0,1]$.

(c)
- On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$. Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{x_n} \geq x_n + 1$. Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} \geq x_n + 1 > x_n$.
  Donc (x_n) est strictement croissante.
- Soit $k \in \mathbb{N}$, on a : $x_{k+1} - x_k \geq 1$.
  Donc, soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \geq \sum\limits_{k=0}^{n-1} 1$.
  Donc, par somme télescopique : $x_n - x_0 \geq n$, d'où $x_n \geq x_0 + n$. Donc :
  $$\lim x_n = +\infty.$$
- ln est continue et strictement croissante sur $]x_{n+1}, x_{n+2}]$ donc ln est bijective de $]x_{n+1}, x_{n+2}]$ vers $]\ln(x_{n+1}), \ln(x_{n+2})] =]x_n, x_{n+1}]$.
- Soit $x \in]x_{n+1}, x_{n+2}]$, on a : $f(\ln x) = f(e^{\ln x}) = f(x)$ et, d'après le point précédent, $\ln x \in]x_n, x_{n+1}]$.

(d)
- Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une unique fonction f définie sur $]-\infty, x_{n+1}]$, continue sur $]-\infty, x_n]$ qui coïncide avec φ sur $[0,1]$ et qui vérifie : $\forall x \in]-\infty, x_n]$, $f(x) = f(e^x)$.
  - Pour $n = 0$.
    * Analyse : Supposons qu'il existe f définie sur $]-\infty, 1]$, continue sur $]-\infty, 0]$ qui coïncide avec φ sur $[0,1]$ et qui vérifie : $\forall x \in]-\infty, 0]$, $f(x) = f(e^x)$.
      Soit $x \in]-\infty, 0]$, comme $e^x \in [0,1]$, on a :
      $$f(x) = f(e^x) = \varphi(e^x).$$
      Et, soit $x \in]0,1]$, on a : $f(x) = \varphi(x)$.
    * Synthèse : Posons $f : \begin{array}{ccl}]-\infty, 1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \varphi(e^x) & \text{si } x < 0 \\ \varphi(x) & \text{si } x \in [0,1]. \end{cases} \end{array}$.
      Alors, comme φ est continue :
      $$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \varphi(1) = \varphi(0) = f(0) \text{ et } \lim_{x \to 0^+} f(x) = \varphi(0) = f(0).$$
      Donc f est continue en 0.
      Comme f est continue sur $]-\infty, 0[$, f est continue sur $]-\infty, 0]$.
      De plus : $\forall x \in]-\infty, 0]$, $f(x) = \varphi(e^x) = f(e^x)$ et f coïncide avec φ sur $[0,1]$.
    * D'où l'existence et l'unicité de f pour $n = 0$.
  - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons le résultat vrai au rang n. Notons $\tilde{f}$ la fonction obtenue au rang n.
    * Analyse : Supposons qu'il existe f définie sur $]-\infty, x_{n+2}]$, continue sur $]-\infty, x_{n+1}]$ qui coïncide avec φ sur $[0,1]$ et qui vérifie : $\forall x \in]-\infty, x_{n+1}]$, $f(x) = f(e^x)$.
      Alors f vérifie ces propriétés sur $]-\infty, x_{n+1}]$ donc, par unicité : $\forall x \in]-\infty, x_{n+1}]$, $f(x) = \tilde{f}(x)$.
      Soit $x \in]x_{n+1}, x_{n+2}]$,alors $f(x) = f(\ln x)$ avec $\ln x \in]x_n, x_{n+1}]$ donc $f(x) = \tilde{f}(\ln x)$.

* Synthèse : Posons $\begin{array}{rccl} f: &]-\infty, x_{n+2}] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{si } x \leq x_{n+1} \\ \tilde{f}(\ln x) & \text{si } x > x_{n+1}. \end{cases} \end{array}$.

  Alors f est clairement continue sur $]-\infty, x_{n+1}] \setminus \{x_n\}$. De plus, comme $\tilde{f}$ est continue sur $]-\infty, x_n]$:

$$\lim_{x \to x_n^+} f(x) = \tilde{f}(\ln x_n) = \tilde{f}(e^{\ln x_n}) = \tilde{f}(x_n) = f(x_n),$$

$$\lim_{x \to x_n^-} f(x) = \tilde{f}(x_n) = f(x_n).$$

  Donc f est continue en x_n.
  Ainsi f est continue sur $]-\infty, x_{n+1}]$.
  De plus, f coïncide avec $\tilde{f}$ donc avec φ sur $[0,1]$.
  Enfin,
  · Soit $x \in]-\infty, x_n]$, $f(x) = \tilde{f}(x) = \tilde{f}(e^x) = f(x)$ car $e^x \leq x_{n+1}$.
  · Soit $x \in]x_n, x_{n+1}]$, $f(x) = \tilde{f}(x) = \tilde{f}(\ln(e^x)) = f(e^x)$ car $e^x > x_{n+1}$.
  Donc f convient.
* D'où l'existence et l'unicité de f au rang $n+1$.

– On a donc montré le résultat par récurrence sur n.

- Comme $\lim x_n = +\infty$, le résultat est vrai sur $\mathbb{R}$, donc il existe une unique fonction $f \in \mathcal{E}(\exp)$ qui coïncide avec φ sur $[0,1]$.
- Ainsi $\mathcal{E}(\exp)$ est l'ensemble des fonctions ainsi construites qui coïncident avec une fonction quelconque φ continue sur $[0,1]$ telle que $\varphi(0) = \varphi(1)$.